Maths pour l'image : algèbre linéaire et géométrie
Fiche d'exercices 2 - applications linéaires

Exercice 1
f, g, h sont des applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies comme suit. Sont-elles linéaires ?

1. $f(x, y, z) = (2x, y + z, 2x + 5y - z)$
2. $g(x, y, z) = (y + 3z, 2y - 4x, xz)$
3. $h(x, y, z) = (x, y, z + 1)$

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x + y + z, z)$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est linéaire
2. Déterminer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$
3. Déterminer $Ker\ f$ et $Im\ f$

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire avec $f(1, 1, 0) = (1, 0)$, $f(1, -1, 0) = (-1, 2)$ et $f(1, 0, 1) = (0, 2)$. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Trouver les images par f de e_1, e_2 et e_3.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire et $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On sait que $f(e_1) = (1, 2, 3), f(e_2) = (1, 0, 1), f(e_3) = (0, 1, 1)$.

1. Déterminer l'image par f de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
2. Déterminer $Ker\ f$ et $Im\ f$

Exercice 5
Soient E, F, G des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, $f : E \to F$, $g : E \to F$, $h : F \to G$ des applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f + g : E \to F$, $f + g(v) = f(v) + g(v)$
2. $\lambda f : E \to F$, $\lambda f(v) = \lambda \cdot f(v)$
3. $h \circ g : E \to G$, $h \circ g(v) = h(g(v))$