Introduction aux Graphes

Florent Foucaud - Malika More - Thibault Ralet
Carine Simon - Thierry Trévisan

1A - BUT Info - UCA

R207 Graphes

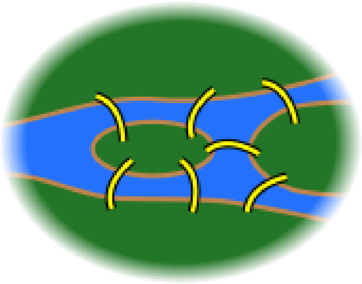
Année 2021-2022

Sommaire

Les sept ponts de Königsberg

Une énigme

Le fleuve Pregel traverse la ville et entoure deux îles. Sept ponts permettent de traverser. En 1736, le mathématicien Leonhard Euler demande : Est-il possible de faire une promenade qui emprunte chacun des sept ponts une fois et une seule (et revient à son point de départ) ?

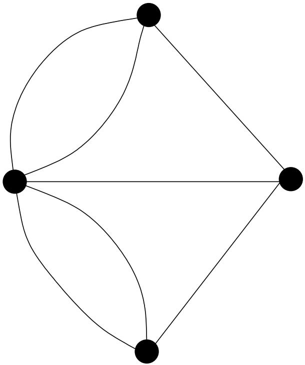


- Leonard Euler. ≪ *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ≫. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1759

Les sept ponts de Königsberg

Une énigme

Le fleuve Pregel traverse la ville et entoure deux îles. Sept ponts permettent de traverser. En 1736, le mathématicien Leonhard Euler demande : Est-il possible de faire une promenade qui emprunte chacun des sept ponts une fois et une seule (et revient à son point de départ) ?

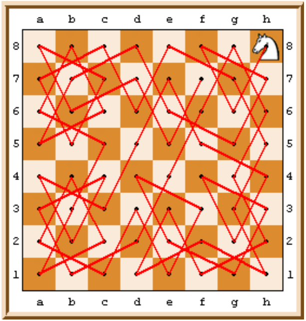


Leonard Euler. « *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ». Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1759

La course du cavalier

Une autre énigme

Peut-on promener un cavalier, en observant les règles de déplacement de cette pièce aux échecs (deux cases dans une direction, une case dans l'autre) sur l'échiquier (8 lignes et 8 colonnes) de sorte qu'il passe une fois et une seule par chacune des cases ?

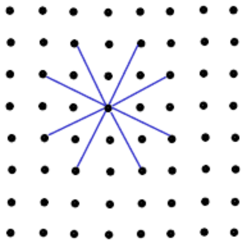


- al-Adli ar-Rumi donne une solution, vers 840.
- Warnsdorff donne une méthode heuristique, 1843.

La course du cavalier

Une autre énigme

Peut-on promener un cavalier, en observant les règles de déplacement de cette pièce aux échecs (deux cases dans une direction, une case dans l'autre) sur l'échiquier (8 lignes et 8 colonnes) de sorte qu'il passe une fois et une seule par chacune des cases ?

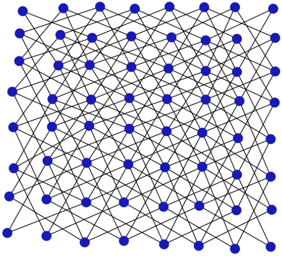


- al-Adli ar-Rumi donne une solution, vers 840.
- Warnsdorff donne une méthode heuristique, 1843.

La course du cavalier

Une autre énigme

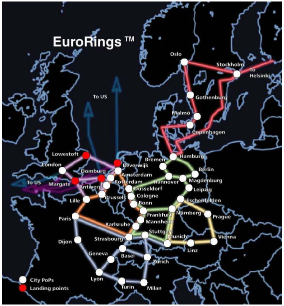
Peut-on promener un cavalier, en observant les règles de déplacement de cette pièce aux échecs (deux cases dans une direction, une case dans l'autre) sur l'échiquier (8 lignes et 8 colonnes) de sorte qu'il passe une fois et une seule par chacune des cases ?

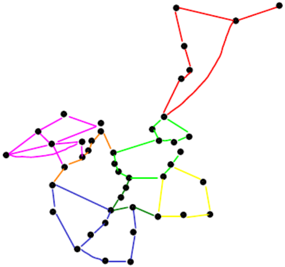


- al-Adli ar-Rumi donne une solution, vers 840.
- Warnsdorff donne une méthode heuristique, 1843.

Un réseau

The pan European KPNQwest network, when complete, will connect major cities together by six high-capacity backbone rings.



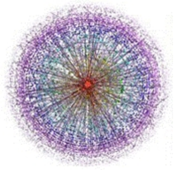


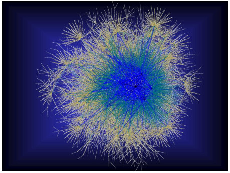
- Atlas of Cyberspace, Martin Dodge & Rob Kitchin 2007

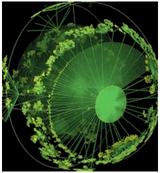
Le graphe du Web

Définition

Ses sommets correspondent aux pages web, ses arêtes aux hyperliens.







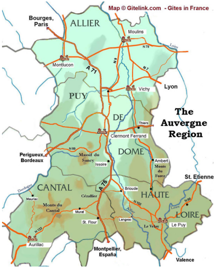
Remarques

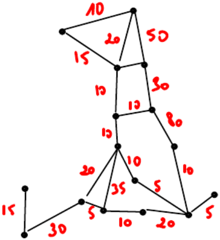
- Ce graphe est tellement énorme que trouver de bonnes manières de le dessiner est un domaine de recherche à part entière.
- Comprendre les propriétés de ce graphe est essentiel pour une compagnie comme Google.

- Atlas of Cyberspace, Martin Dodge & Rob Kitchin 2007

Le voyageur de commerce

Étant donné un ensemble de destinations, le problème est de trouver un circuit qui visite chaque destination en visitant chacune d'elle exactement une seule fois, le tout en minimisant le coût du voyage.

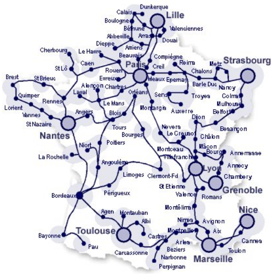


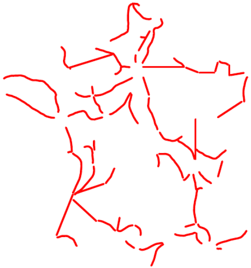


- William Rowan Hamilton, vers 1800.
- Karl Menger, vers 1930.

Mise en place d'un réseau mixte cuivre et optique

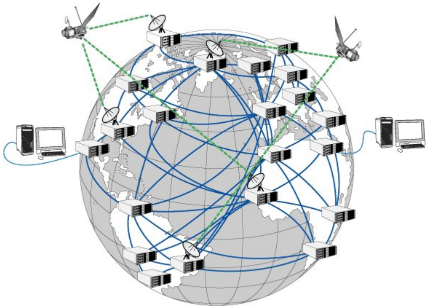
Une société de téléphonie souhaite câbler entièrement une zone à l'aide de fibres optiques en minimisant le nombres de connexions à réaliser. Le nouveau câblage s'appuie sur le réseau téléphonique déjà existant.





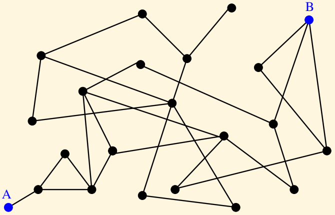
Problème de routage dans un réseau du type internet

Si un utilisateur désire accéder au contenu d'une page web présentée sur un serveur, une connexion entre ce serveur et la machine de l'utilisateur est nécessaire. Cette connexion n'est en général pas directe mais doit passer par une série de machine relais.



À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

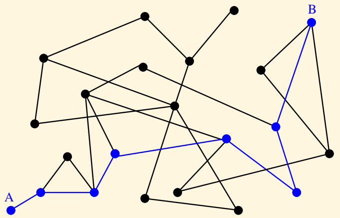
Les machines A et B peuvent-elles communiquer ?

Notion

existence de chaînes

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

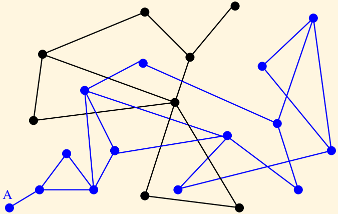
Si oui, en passant par quels intermédiaires ?

Notion

détermination de chaînes - longueur de chaînes

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

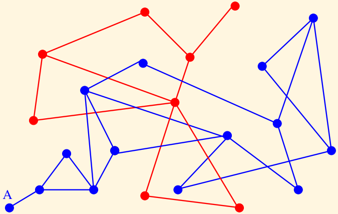
Avec quelles machines la machine A peut-elle communiquer ?

Notion

sommets accessibles - composantes connexes

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

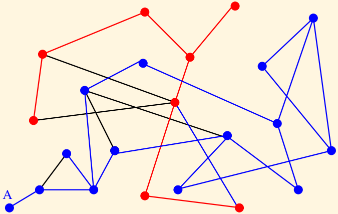
Deux machines quelconques peuvent-elles communiquer ?

Notion

connexité

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

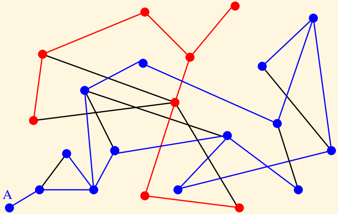
Pourrait-on se passer de certaines connexions ?

Notion

recouvrement

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

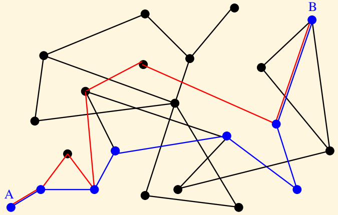
Trouver un ensemble minimal de connexions préservant la topologie du réseau ?

Notion

arbre ou forêt de recouvrement minimal

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

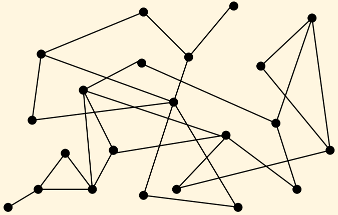
Si deux machines peuvent communiquer de plusieurs façons, comment choisir la meilleure ?

Notion

chemins optimaux, distance

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un circuit imprimé



Question

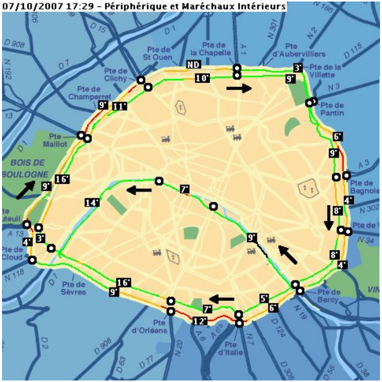
Imprimer le circuit de sorte que les liaisons ne se croisent pas (pour minimiser les couches) ?

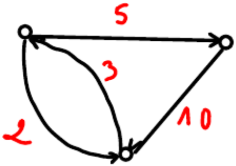
Notion

graphe planaire

Problème de temps de parcours

Par exemple, autour du périphérique à Paris.
Notons que les temps de parcours dans un sens et dans l'autre ne sont pas forcément les mêmes (notion de graphe orienté).



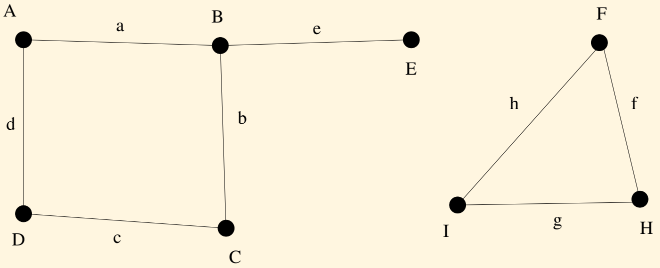


Sommaire

Sommaire

Définitions et vocabulaire

Un graphe



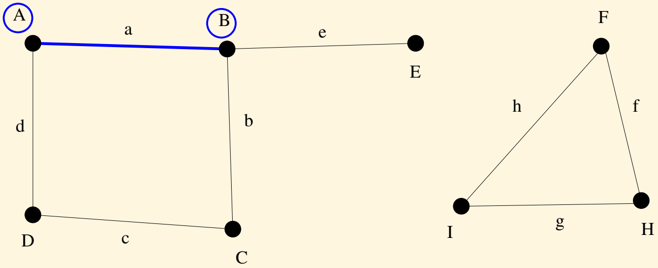
« Définition » par l'exemple

Le graphe $G = (V, E)$ est constitué

- des sommets $V = \{A, B, C, D, E, F, H, I\}$
- des arêtes $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

Définitions et vocabulaire

Un graphe

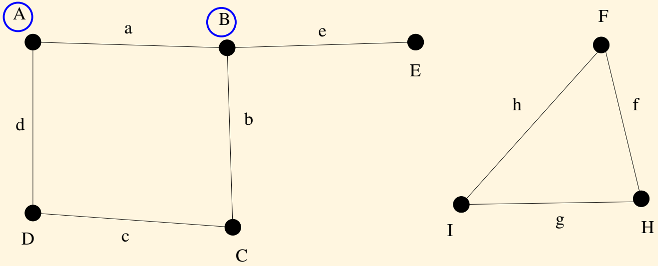


« Définition » par l'exemple

les sommets A et B sont les extrémités de l'arête a

Définitions et vocabulaire

Un graphe

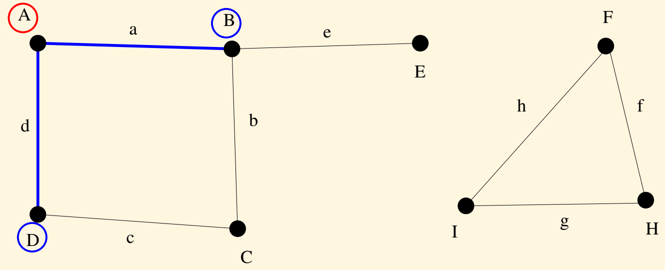


« Définition » par l'exemple

les sommets A et B sont voisins ou adjacents

Définitions et vocabulaire

Un graphe

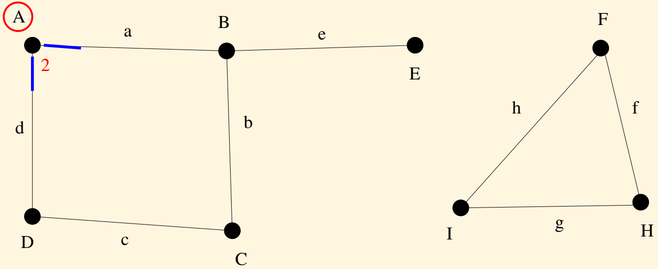


« Définition » par l'exemple

l'ensemble des sommets voisins du sommet A est $\{B, D\}$

Définitions et vocabulaire

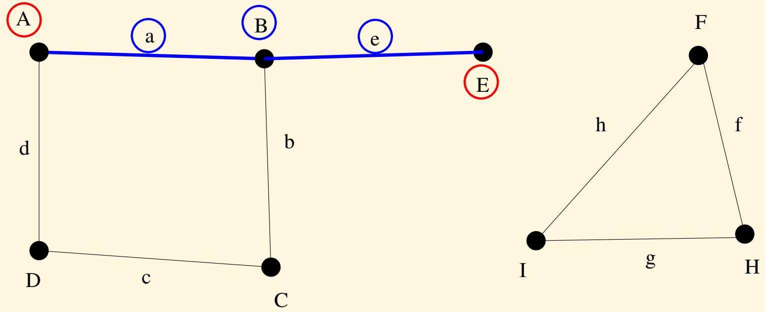
Un graphe



« Définition » par l'exemple

le degré du sommet A est 2.

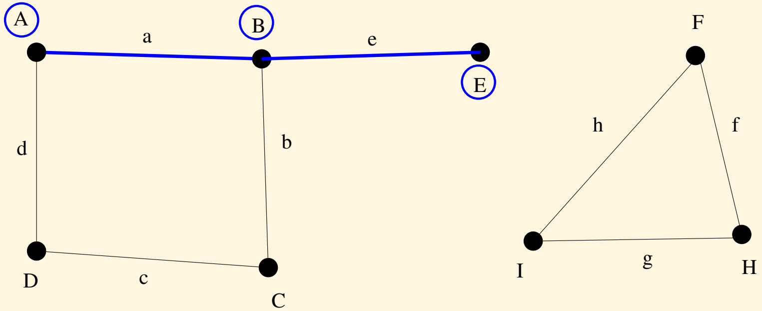
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

AaBeE est une chaîne de notre graphe.
Les extrémités de cette chaîne sont A et E.

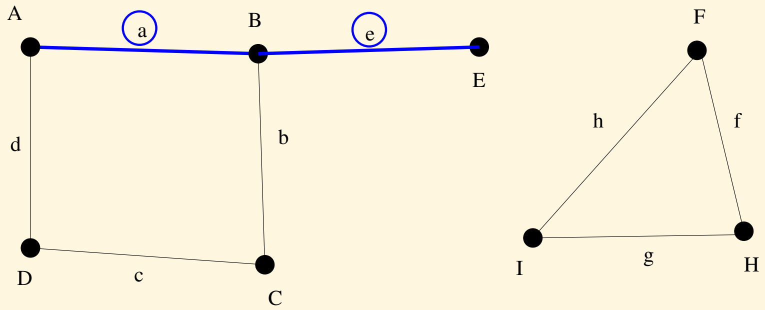
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

$AaBeE$ est une chaîne de notre graphe.
Les sommets de la chaîne sont A, B et E.

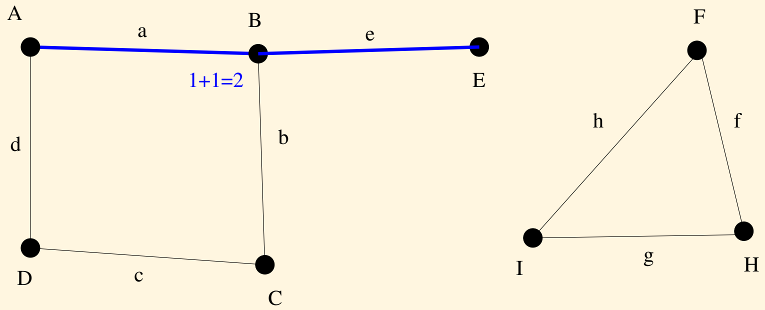
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

$AaBeE$ est une chaîne de notre graphe.
Les arêtes de la chaîne sont a et e.

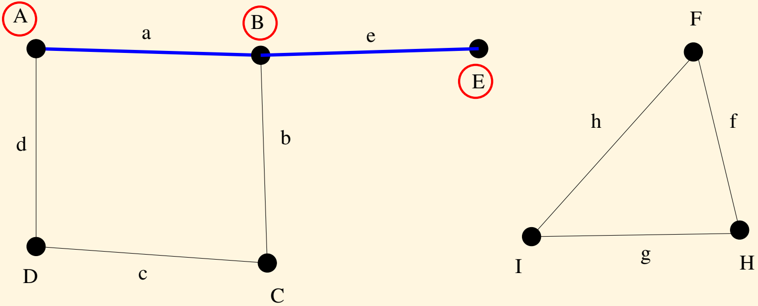
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

AaBeE est une chaîne de notre graphe.
La longueur de la chaîne est 2.

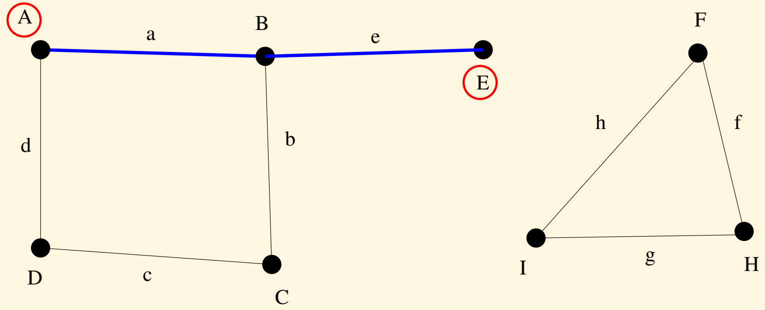
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

AaBeE est une chaîne de notre graphe.
En général, on parle en raccourci de la "chaîne *ABE*".

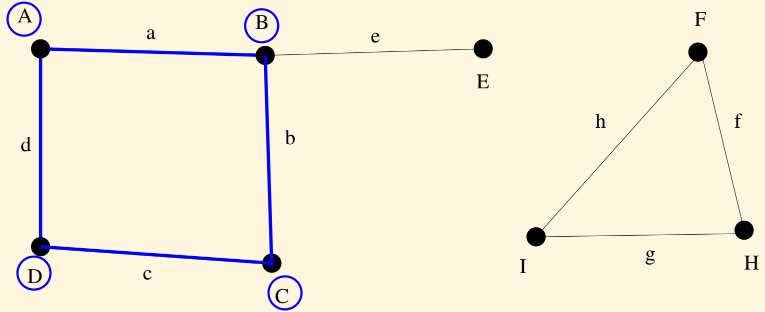
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

$AaBeE$ est une chaîne de notre graphe.
E est accessible à partir de A et A est accessible à partir de E.

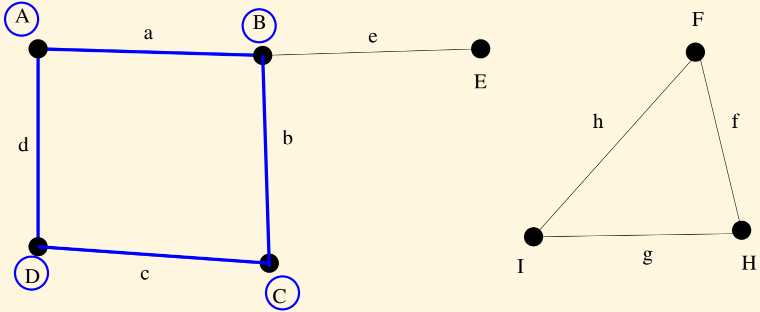
Cycle



« Définition » par l'exemple :

ABCDA est un cycle de notre graphe.

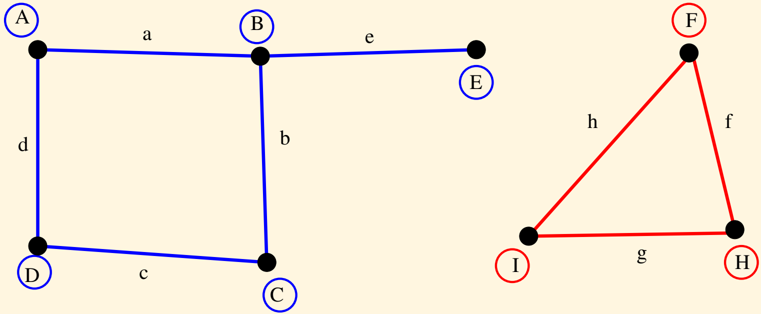
Cycle



« Définition » par l'exemple :

ABCDA est un cycle de notre graphe.

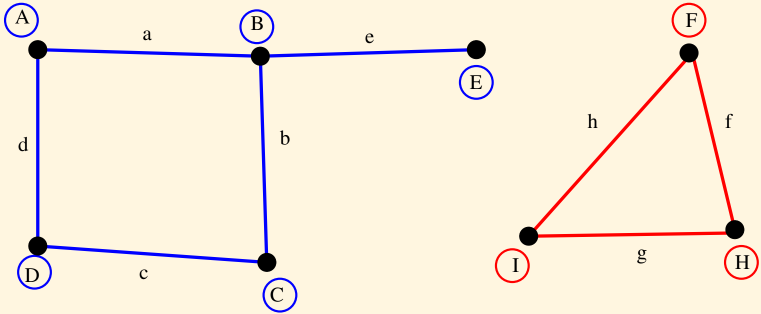
Connexité



« Définition » par l'exemple :

Composante connexe : ensemble maximal de sommets mutuellement accessibles.

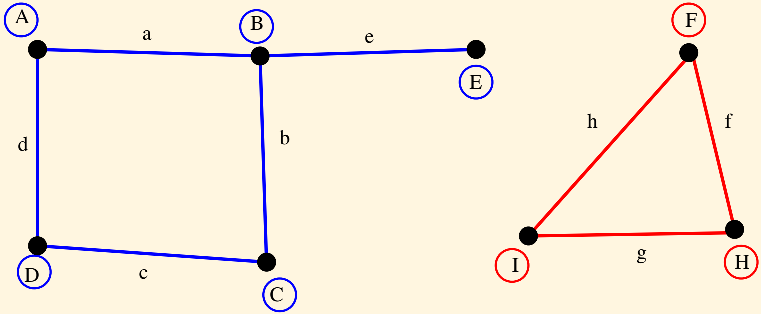
Connexité



« Définition » par l'exemple :

Les composantes connexes de notre graphe sont $\{A, B, C, D, E\}$ et $\{F, H, I\}$.

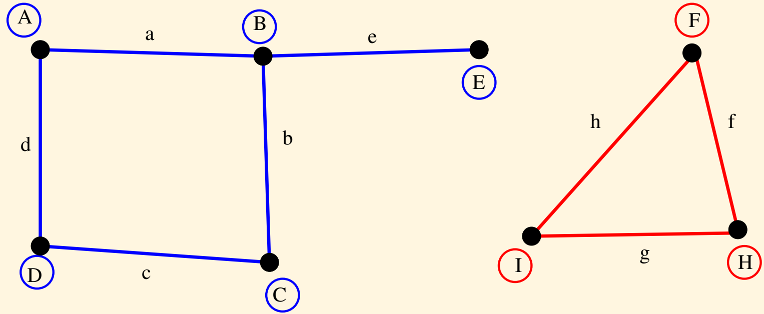
Connexité



« Définition » par l'exemple :

Un graphe est connexe si tous les sommets sont mutuellement accessibles (c.-à-d. graphe constitué d'une seule composante connexe).

Connexité



« Définition » par l'exemple :

Notre graphe n'est pas connexe puisqu'il est constitué de deux composantes connexes.

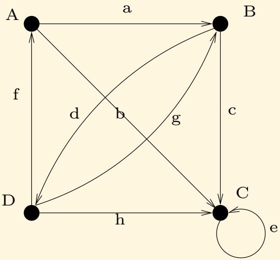
Calcul de la composante connexe de x ?

L'algorithme

```
Marquer x en gris.   gris = il faut visiter ses voisins
Tant qu'il reste des sommets marqués gris faire
    choisir un sommet y en gris;
    marquer ses voisins non marqués en gris;
    marquer y en noir;   noir = on a visité tous ses voisins
fin tant que.
Renvoyer les sommets marqués en noir.
```

Définitions et vocabulaire

Un graphe orienté



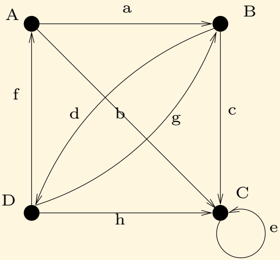
« Définition » par l'exemple

Le graphe orienté $G = (V, A)$ est constitué

- des sommets $V = \{A, B, C, D\}$
- des arcs $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

Définitions et vocabulaire

Un graphe orienté



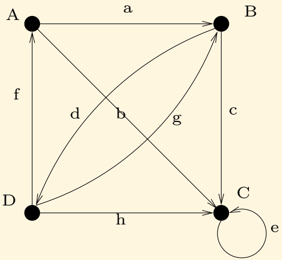
« Définition » par l'exemple

l'arc e est une boucle

les arcs d, g sont symétriques

Définitions et vocabulaire

Un graphe orienté

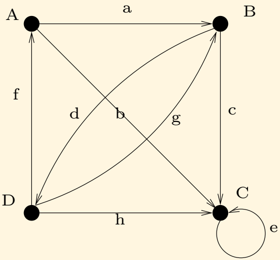


« Définition » par l'exemple

l'ensemble des voisins entrants du sommet A est $\{D\}$
l'ensemble des voisins sortants du sommet A est $\{B, C\}$

Définitions et vocabulaire

Un graphe orienté



« Définition » par l'exemple

le degré entrant du sommet A est 1.
le degré sortant du sommet A est 2.

Sommaire

Représentations d'un graphe

Question

Comment représenter un graphe afin de le coder en machine ?

Remarque

La démarche est la même dans le cas d'un graphe orienté ou non. En effet, un graphe (non orienté) est vu comme un graphe orienté où on a un arc dans les deux sens pour chaque arête.

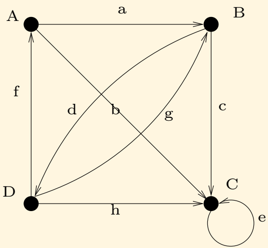
Réponse

Il y a plusieurs solutions.

- avec des listes
- avec des matrices

Représentations par listes (graphes orientés)

Listes de successeurs



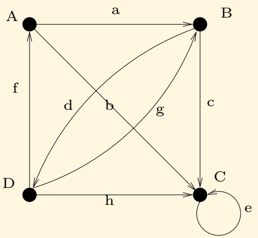
sommet	successeurs
A	B, C
B	C, D
C	C
D	A, B, C

Remarques

- Alternative : listes de prédécesseurs.
- Pour un graphe non-orienté, on prend simplement la liste des voisins.

Représentation par Matrice (graphes orientés)

Tableau d'adjacence

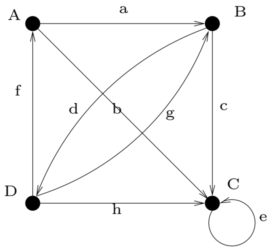


origine \ fin	A	B	C	D
A		a	b	
B			c	d
C			e	
D	f	g	h	

Matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Plusieurs matrices d'adjacence pour un même graphe



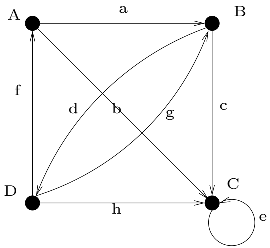
Pour l'ordre A, B, C, D

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour l'ordre B, A, C, D

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	0	0	1	1
C	0	0	1	0
D	1	1	1	0

Plusieurs matrices d'adjacence pour un même graphe



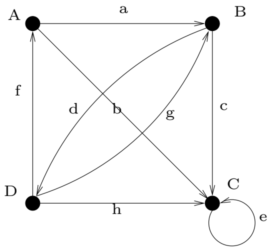
Pour l'ordre A, B, C, D

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour l'ordre B, A, C, D

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	0	0	1	1
C	0	0	1	0
D	1	1	1	0

Plusieurs matrices d'adjacence pour un même graphe



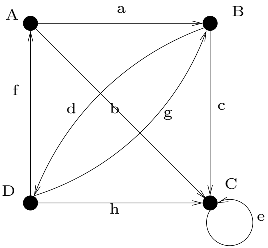
Pour l'ordre A, B, C, D

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour l'ordre B, A, C, D

	B	A	C	D
A	1	0	1	0
B	0	0	1	1
C	0	0	1	0
D	1	1	1	0

Plusieurs matrices d'adjacence pour un même graphe



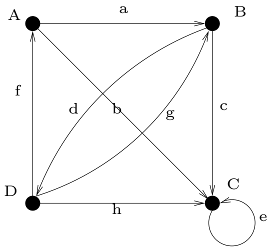
Pour l'ordre A, B, C, D

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour l'ordre B, A, C, D

	B	A	C	D
A	1	0	1	0
B	0	0	1	1
C	0	0	1	0
D	1	1	1	0

Plusieurs matrices d'adjacence pour un même graphe



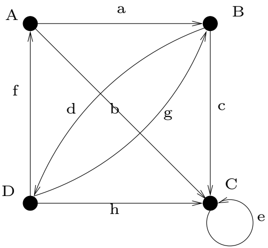
Pour l'ordre A, B, C, D

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour l'ordre B, A, C, D

	B	A	C	D
B	0	0	1	1
A	1	0	1	0
C	0	0	1	0
D	1	1	1	0

Plusieurs matrices d'adjacence pour un même graphe



Pour l'ordre A, B, C, D

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour l'ordre B, A, C, D

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Représentation d'un graphe

Dans le cadre de ce cours

- On utilisera une matrice d'adjacence.
  Par défaut (mais c'est simplement une convention entre nous),
  - on utilisera l'ordre croissant ou l'ordre alphabétique sur les noms des sommets
  - Ceci dans le but de pouvoir vérifier qu'on parle bien du même graphe.

Remarque

On peut aussi utiliser les matrices pour représenter des graphes non orientés, et en adaptant un petit peu on peut représenter des graphes ayant plusieurs arcs ou arêtes (multigraphes) ou encore des graphes avec des poids sur les arcs.

Sommaire

Sommaire

Graphe complet (“clique”)

Définition

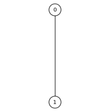
Les sommets sont tous voisins deux à deux

- nombre de sommets : $n \geqslant 1$
- nombre d'arêtes : $\binom{n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2}$
- notation : K_n

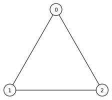
Exemples

K_1

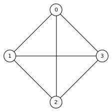
K_2



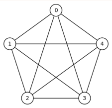
K_3



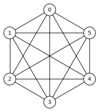
K_4



K_5



K_6



Graphe biparti complet

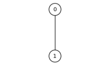
Définition

Deux paquets non-vides de sommets P et Q et toutes les arêtes entre ces deux paquets.

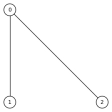
- nombre de sommets : $p + q$ (avec $p \geqslant 1, q \geqslant 1$)
- nombre d'arêtes : $p.q$
- notation : $K_{p,q}$

Exemples

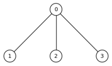
$K_{1,1}$



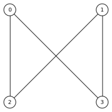
$K_{1,2}$



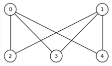
$K_{1,3}$



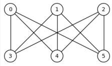
$K_{2,2}$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



Chaîne

Définition

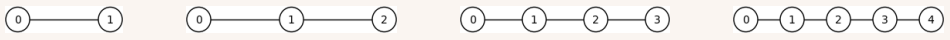
Les sommets forment une ligne

- nombre de sommets : $n \geqslant 2$
- nombre d'arêtes : $n - 1$
- notation : P_n (P comme « *path* »)

On dit que P_n est une chaîne de longueur $n - 1$.

Exemples

P_2 P_3 P_4 P_5



Chaîne (élémentaire)

Définition

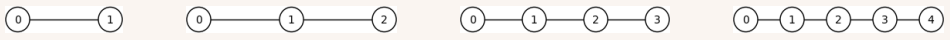
Les sommets forment une ligne

- nombre de sommets : $n \geqslant 2$
- nombre d'arêtes : $n - 1$
- notation : P_n (P comme « *path* »)

On dit que P_n est une chaîne de longueur $n - 1$.

Exemples

P_2 P_3 P_4 P_5



Sommaire

Connexité

Définition

Un sommet y est accessible depuis un sommet x si il existe une chaîne ayant pour extrémités x et y.

Définition

Un graphe est connexe si pour toute paire (x, y) de sommet distincts y est accessible depuis x.

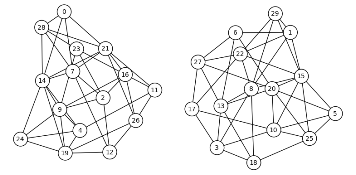
Définition

La composante connexe d'un sommet x est le sous-graphe induit par l'ensemble des sommets accessibles depuis x.

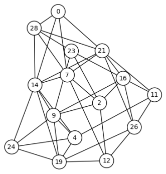
Connexité

Exemple

- Ce graphe n'est pas connexe



- Le sommet 26 est accessible depuis 0.
- Le sommet 1 n'est pas accessible depuis 0.
- Il a 2 composantes connexes.
- La composante connexe de 0 est le graphe suivant.



Sommaire

Cycle

Définition

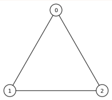
Une chaîne P_n à laquelle on ajoute l'arête $n-1,0$.

- nombre de sommets : $n \geqslant 3$
- nombre d'arêtes : n
- notation : C_n

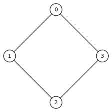
On dit que C_n est un cycle de longueur n.

Exemples

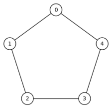
C_3



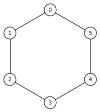
C_4



C_5



C_6

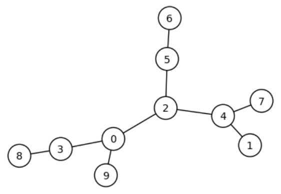


Arbre

Définition

Un arbre est un graphe connexe sans cycle.

Exemples

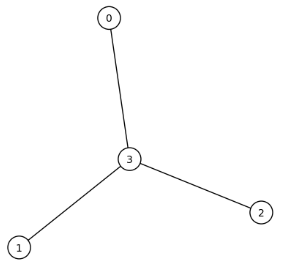


Arbre

Définition

Un arbre est un graphe connexe sans cycle.

Exemples



Arbre

Définition

Un arbre est un graphe connexe sans cycle.

Exemples

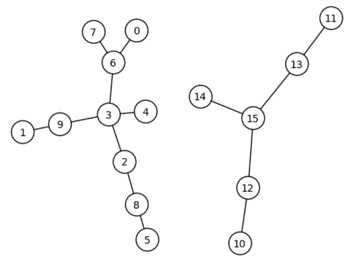
Les arbres

cachent la forêt

Définition

Une forêt est un graphe sans cycle.

Exemple



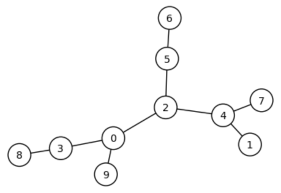
Les arbres

cachent la forêt

Définition

Une forêt est un graphe sans cycle.

Exemple

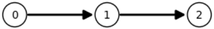


Sommaire

Sommaire

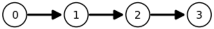
Quelques familles de graphes orientés

Chemins orientés



Quelques familles de graphes orientés

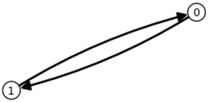
Chemins orientés



Sommaire

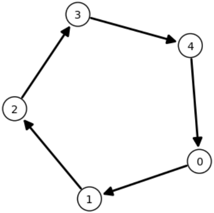
Quelques familles de graphes orientés

Cycles orientés



Quelques familles de graphes orientés

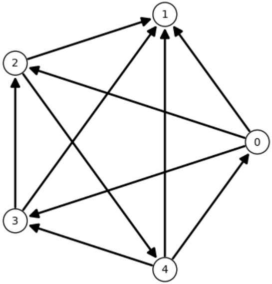
Cycles orientés



Sommaire

Quelques familles de graphes orientés

Tournoi



Quelques familles de graphes orientés

Tournoi transitif