Problèmes de flots

Florent Foucaud - Malika More - Thibault Ralet
Carine Simon - Thierry Trévisan

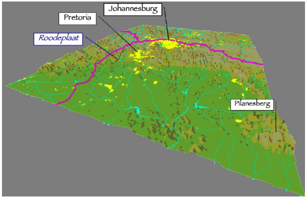
1A - BUT Info - UCA

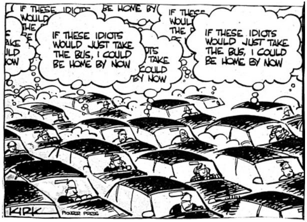
R207 Graphes

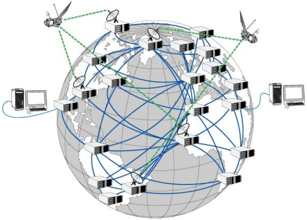
Année 2021-2022

Sommaire

Cette semaine : les flots

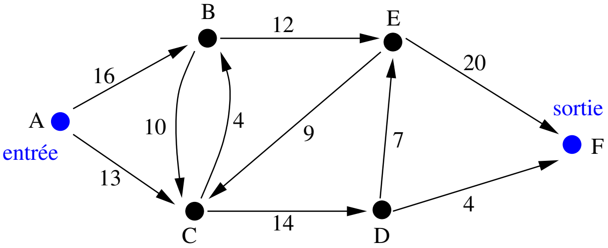






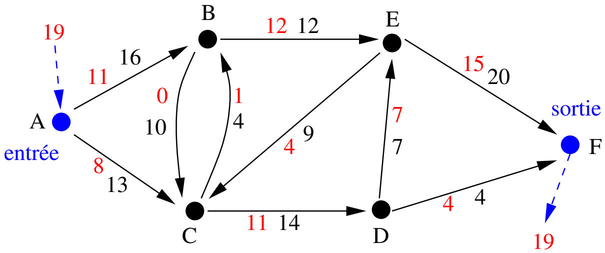
Réseau de transport $R = (V, E, C, \text{entrée}, \text{sortie})$

Graphe orienté connexe sans boucle



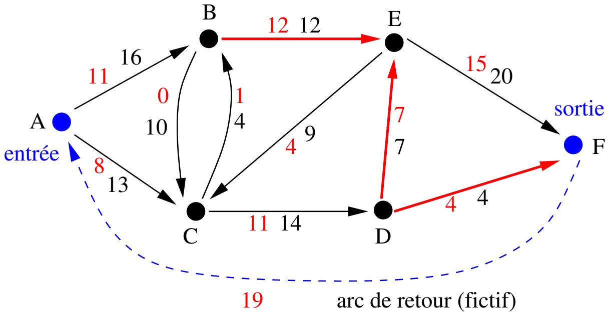
- Sommets particuliers :
  - Entrée : A (degré entrant nul)
  - Sortie : F (degré sortant nul)
- Chaque arc (u, v) possède une capacité $c(u, v) \geq 0$

Flot à travers un réseau



- En A : $19 = 11 + 8$
- En B : $11 + 1 = 0 + 12$
- En C : $8 + 0 + 4 = 1 + 11$
- etc.

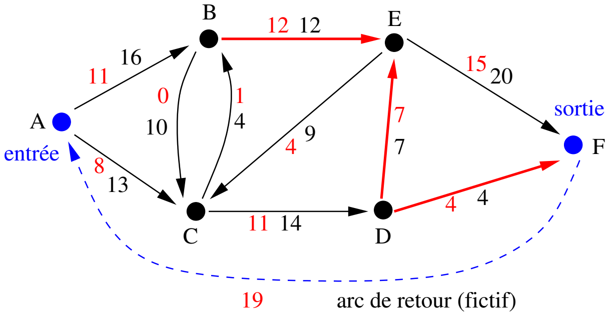
Flot à travers un réseau



- Flux à travers l'arc (C, D) : $\varphi(C, D) = 11$
- Arcs (B, E), (D, E) et (D, F) saturés (en rouge)

- En A : $19 = 11 + 8$
- En B : $11 + 1 = 0 + 12$
- En C : $8 + 0 + 4 = 1 + 11$
- etc.

Flot à travers un réseau

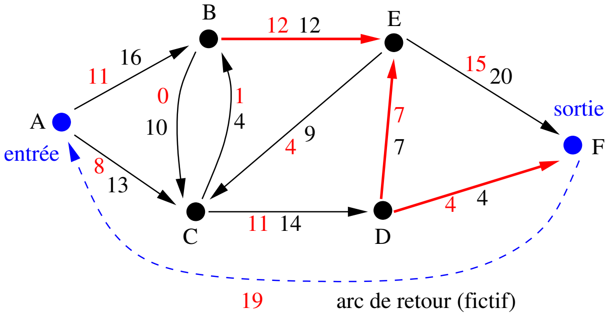


- En A : $19 = 11 + 8$
- En B :
  $11 + 1 = 0 + 12$
- En C :
  $8 + 0 + 4 = 1 + 11$
- etc.

- Conservation des flux
  (loi de nœuds loi de Kirchhoff (1847 circuits éléctriques))

« En chaque sommet, ce qui entre est égal à ce qui sort. »

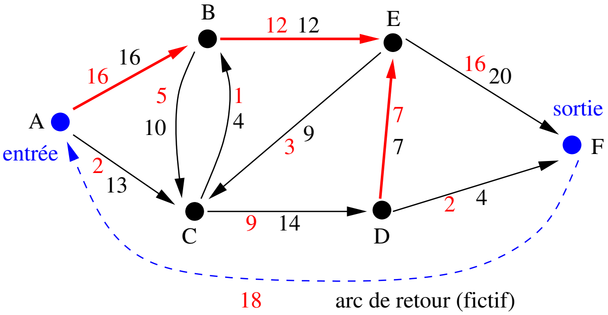
Flot à travers un réseau



- En A : $19 = 11 + 8$
- En B : $11 + 1 = 0 + 12$
- En C : $8 + 0 + 4 = 1 + 11$
- etc.

- Valeur totale du flot $\varphi_0 = 19$ à travers l'arc de retour

Un autre flot réalisable à travers le même réseau



En résumé

Vocabulaire

- Un réseau est un graphe orienté avec 2 sommets particuliers s (l'entrée) et t (la sortie) et une capacité entière $c[a] \geq 0$ pour chaque arc a.
- Un flot dans ce réseau est une valuation entière $\varphi(a) \geq 0$ pour chaque arc a satisfaisant la loi des nœuds.
- Un flot est réalisable (ou *admissible*) si pour tout arc a on a $\varphi(a) \leq c[a]$.
- La valeur du flot ou flot total est égal au flot sur l'arc de retour (l'arc fictif ajouté de t vers s).

Sommaire

Flot maximal

Problème

- Donnée : un réseau
- Question : trouver un flot réalisable maximal (dont la valeur est maximale)

Solution

Algorithme de Ford-Fulkerson (1956)

Lester R. Ford

(1886-1967)

Delbert R. Fulkerson

(1924-1976)

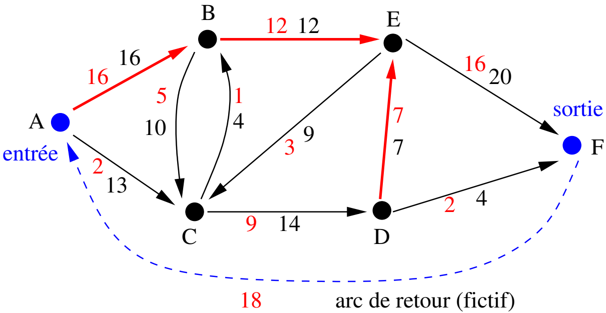
Idée générale

- Procéder par marquages successifs des sommets depuis l'entrée vers la sortie.
- On traite chaque sommet u marqué successivement.
- On essaye de marquer tous les voisins non marqués de u
  - les successeurs avec un $(+)$ si l'arc n'est pas saturé
  - puis les prédécesseurs avec un $(-)$ si l'arc possède un flux non nul
- Ceci permet de trouver des chemins augmentants de l'entrée vers la sortie, s'il en existe.

Algorithme de Ford-Fulkerson

Recherche de chemins augmentants

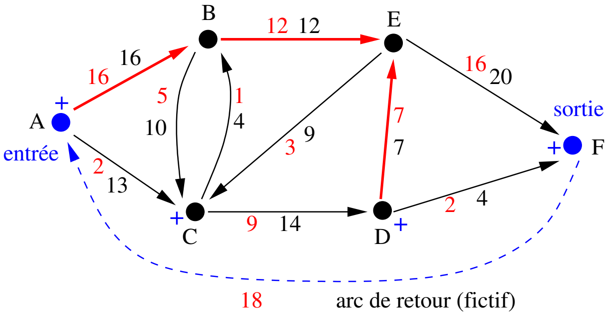
Rappel : les arcs saturés sont en rouge

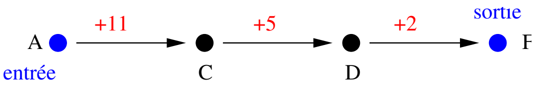


Algorithme de Ford-Fulkerson

Recherche de chemins augmentants

Rappel : les arcs saturés sont en rouge



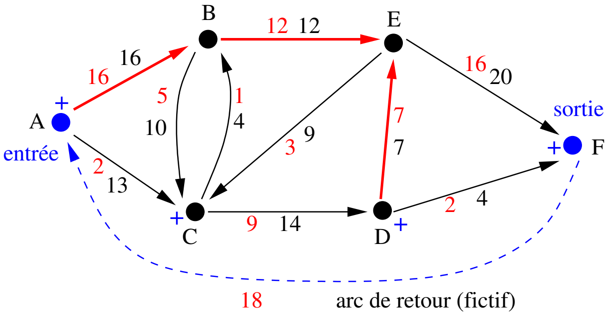


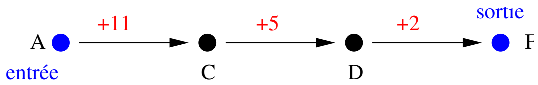
augmenter le flot de 2

Algorithme de Ford-Fulkerson

Recherche de chemins augmentants

Rappel : les arcs saturés sont en rouge



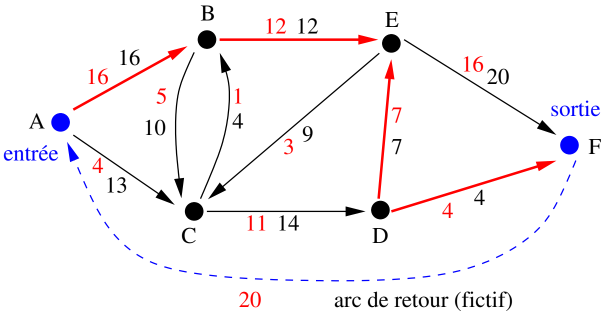


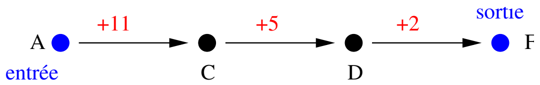
augmenter le flot de 2

Algorithme de Ford-Fulkerson

Recherche de chemins augmentants

Rappel : les arcs saturés sont en rouge

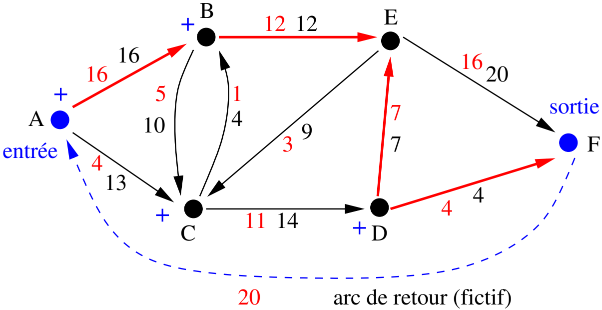




Algorithme de Ford-Fulkerson

Recherche de chemins augmentants

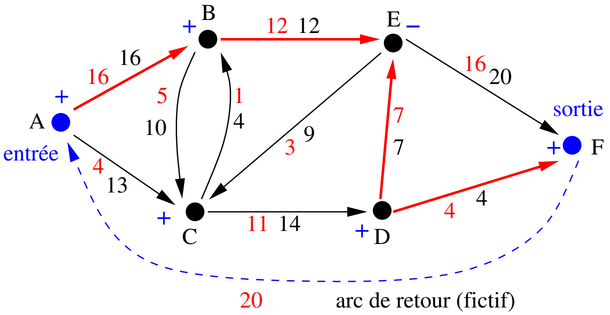
Rappel : les arcs saturés sont en rouge

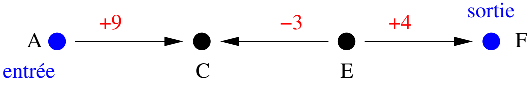


Algorithme de Ford-Fulkerson

Recherche de chemins augmentants

Rappel : les arcs saturés sont en rouge



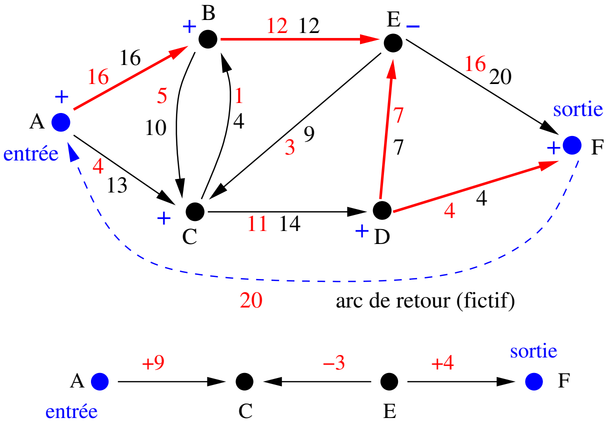


augmenter le flot de 3

Algorithme de Ford-Fulkerson

Recherche de chemins augmentants

Rappel : les arcs saturés sont en rouge

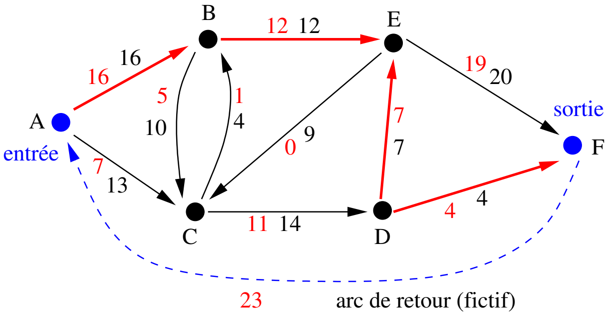


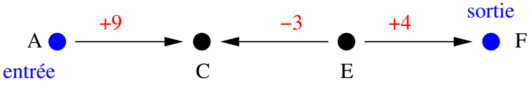
augmenter le flot de 3

Algorithme de Ford-Fulkerson

Recherche de chemins augmentants

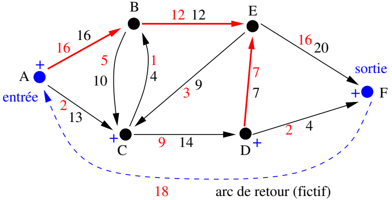
Rappel : les arcs saturés sont en rouge



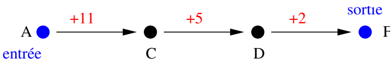


Chemins augmentants

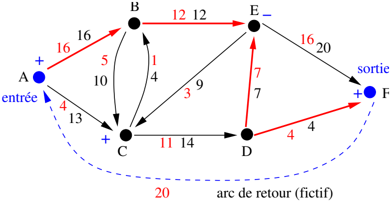
Le cas intuitif : on « ouvre des robinets ».



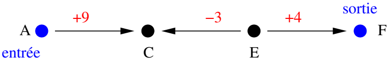
augmenter le flot de 2



Le cas moins intuitif : on « ferme des robinets et on en ouvre d'autres ».



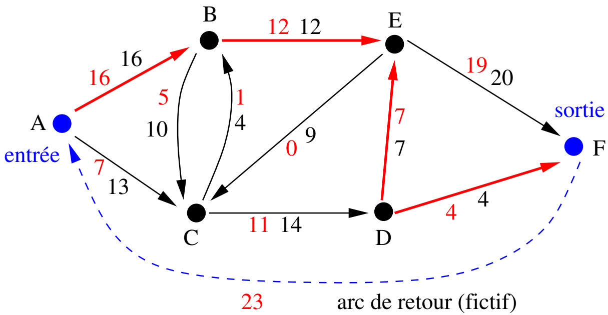
augmenter le flot de 3



Algorithme de Ford-Fulkerson

Condition d'arrêt

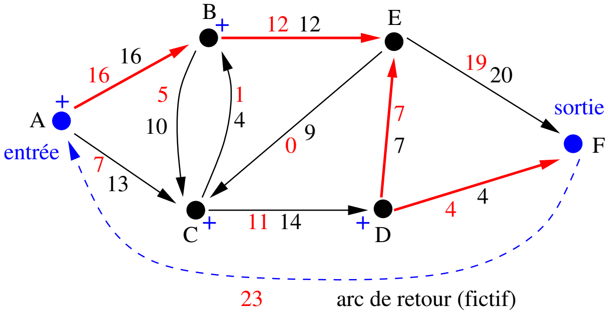
Rappel : les arcs saturés sont en rouge



Algorithme de Ford-Fulkerson

Condition d'arrêt

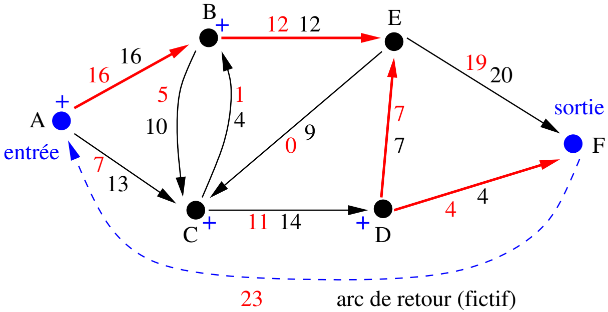
Rappel : les arcs saturés sont en rouge



Algorithme de Ford-Fulkerson

Condition d'arrêt

Rappel : les arcs saturés sont en rouge

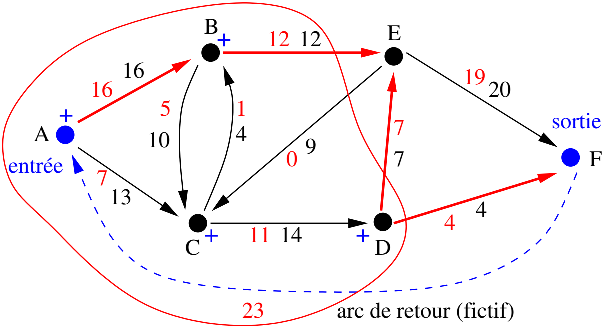


On ne peut plus marquer la sortie : le flot obtenu est maximal

Algorithme de Ford-Fulkerson

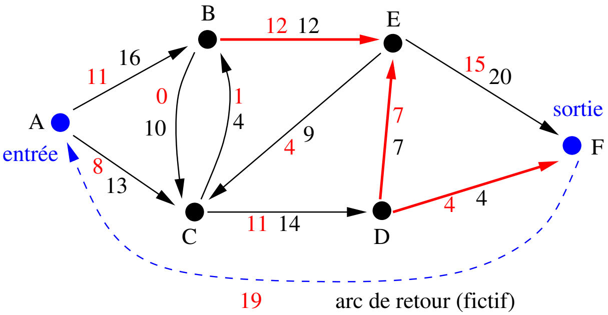
Condition d'arrêt

Rappel : les arcs saturés sont en rouge

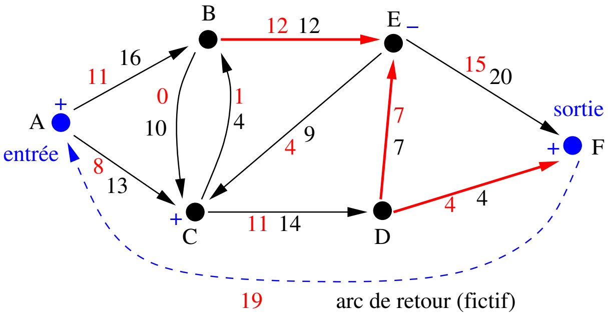


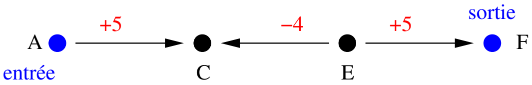
Autre explication : on a trouvé une coupe saturée

Autre résolution (sur le même problème initial)



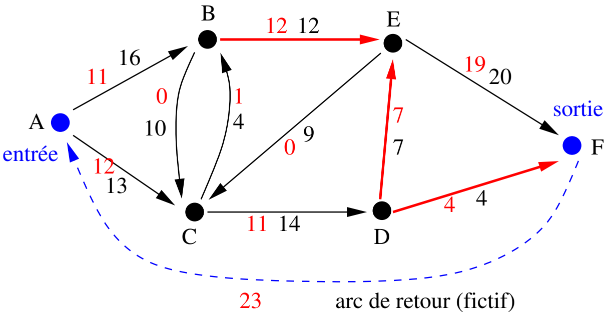
Autre résolution (sur le même problème initial)



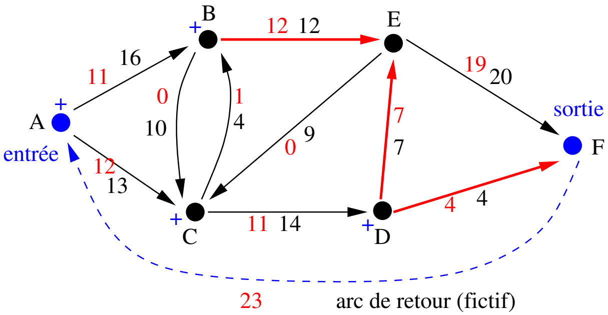


augmenter le flot de 4

Autre résolution (sur le même problème initial)



Autre résolution (sur le même problème initial)



On ne peut plus marquer la sortie :
le flot obtenu est maximal

(même valeur 23 mais flot différent du premier)

Deux notions

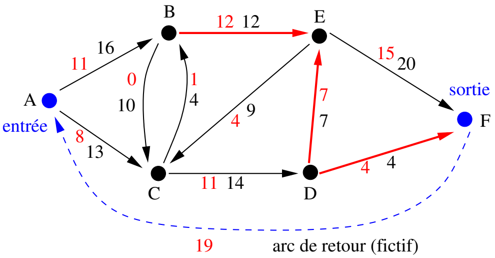
Il y a deux notions importantes au cœur de Ford-Fulkerson :

- Chemin augmentant
- Coupe

Pour définir proprement la notion de chemin augmentant, nous allons introduire un graphe orienté associé à un flot dans un réseau : le graphe d'écart.

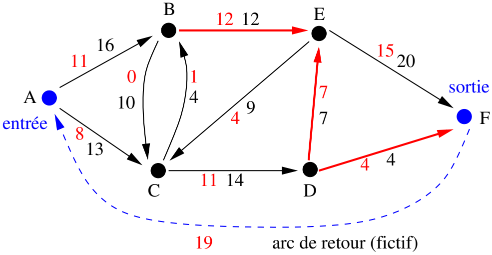
Nous reviendrons plus tard sur les coupes.

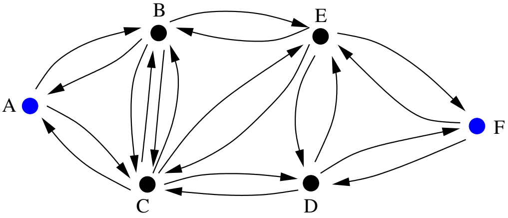
Graphe d'écart



- Mêmes sommets
- Arcs dans les deux sens
- Capacités = écarts
- Supprimer les arcs de capacité nulle (saturation et flux nul)

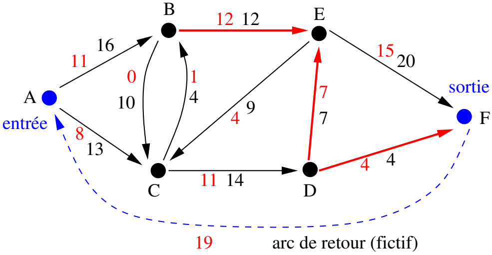
Graphe d'écart

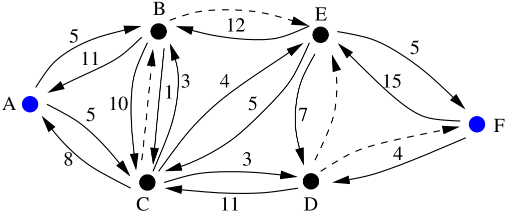




- Mêmes sommets
- Arcs dans les deux sens
- Capacités = écarts
- Supprimer les arcs de capacité nulle (saturation et flux nul)

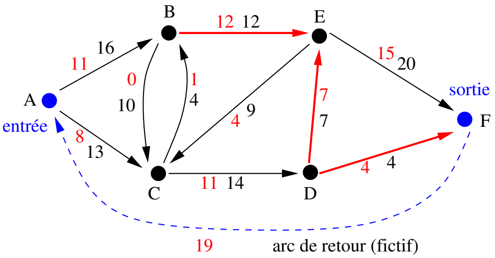
Graphe d'écart

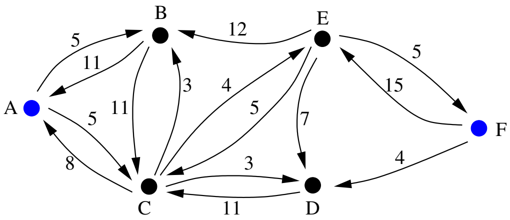




- Mêmes sommets
- Arcs dans les deux sens
- Capacités = écarts
- Supprimer les arcs de capacité nulle (saturation et flux nul)

Graphe d'écart

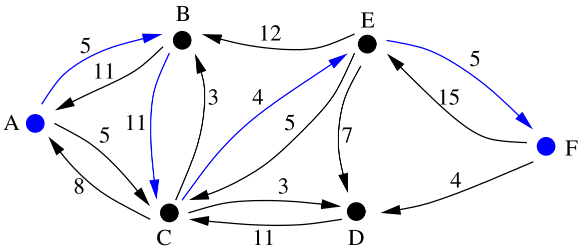




- Mêmes sommets
- Arcs dans les deux sens
- Capacités = écarts
- Supprimer les arcs de capacité nulle (saturation et flux nul)

Chemin augmentant

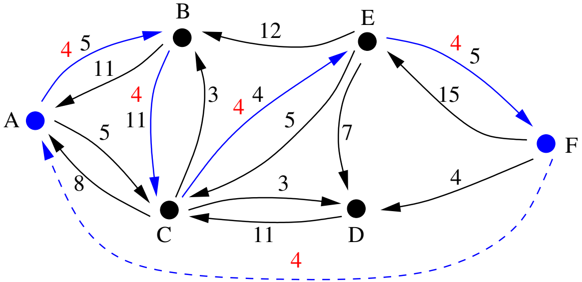
- Chemin de l'entrée vers la sortie dans le graphe d'écart



- Flot réalisable de valeur > 0 à travers le graphe d'écart
- Permet d'augmenter le flot initial

Chemin augmentant

- Chemin de l'entrée vers la sortie dans le graphe d'écart



- Flot réalisable de valeur > 0 à travers le graphe d'écart
- Permet d'augmenter le flot initial

Retour à l'algorithme

- L'algorithme de Ford-Fulkerson trouve des chemins augmentants, s'il en existe
- Implémentation efficace ?
  - Toute la difficulté est de bien choisir les chemins augmentants.
  - Une bonne méthode : utiliser un parcours en largeur du graphe d'écart.
  - Permet d'atteindre plus rapidement un flot maximal.
- Reste à prouver que s'il n'y a plus de chemin augmentant, le flot est maximal...

Résumé

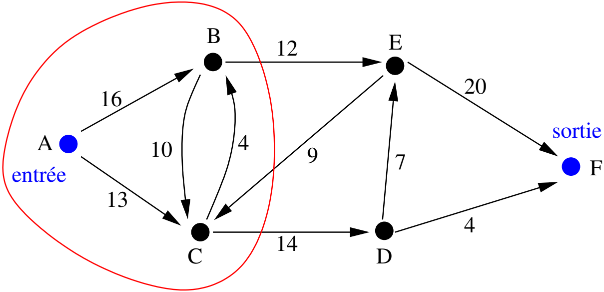
Les notions derrière Ford-Fulkerson

- Ford-Fulkerson procède par marquages successifs depuis le sommet s pour trouver un chemin augmentant par parcours en largeur du graphe d'écart
- Un chemin augmentant est un chemin de s à t dans le graphe d'écart ; il permet d'augmenter le flot dans le réseau initial.
- Ford-Fulkerson recommence la recherche d'un chemin augmentant tant que possible.
- Lorsque ce n'est plus possible on a trouvé une coupe saturée.

Sommaire

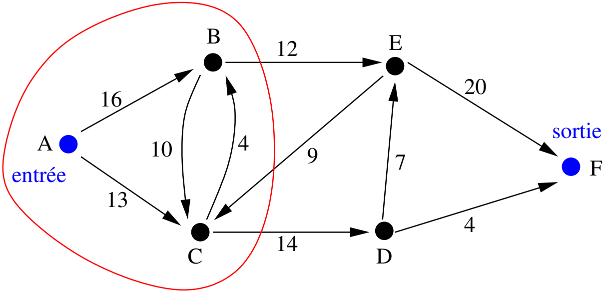
Coupe

Une coupe est une partition des sommets en deux groupes disjoints, l'un, noté $\mathcal{E}$, contenant l'entrée (A) et l'autre la sortie (F).



Capacité d'une coupe

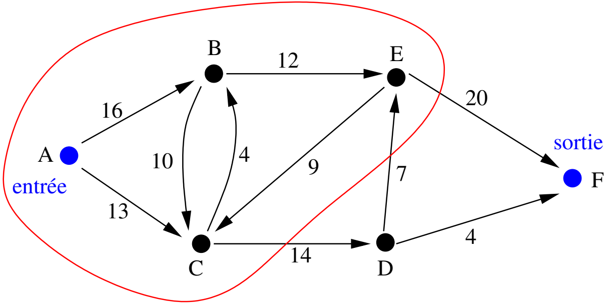
La capacité de la coupe est la somme des capacités des arcs sortants de $\mathcal{E}$ $= 12 + 14 = 26$



Arc sortant = allant d'un sommet de $\mathcal{E}$ vers un sommet extérieur à $\mathcal{E}$

Capacité d'une coupe

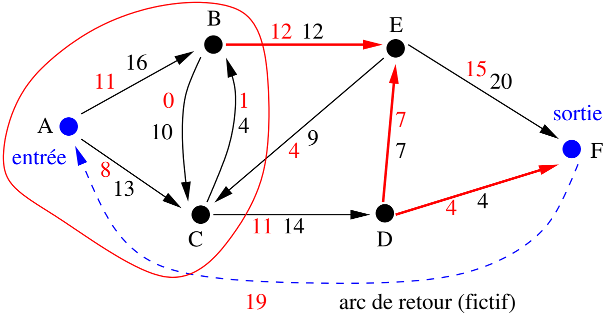
La capacité de la coupe est la somme des capacités des arcs sortants de $\mathcal{E}$ $= 14 + 20 = 34$



Arc sortant = allant d'un sommet de $\mathcal{E}$ vers un sommet extérieur à $\mathcal{E}$

Flot net à travers une coupe

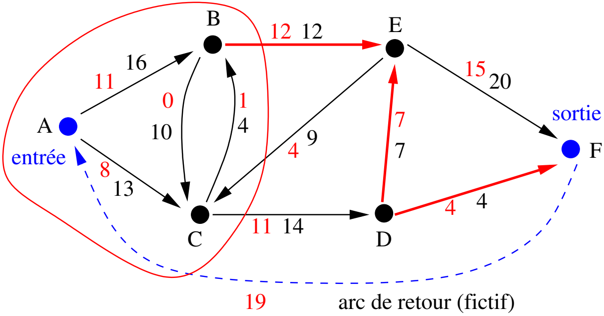
Somme algébrique des flux sur les arcs entre $\mathcal{E}$ et l'extérieur
$= 12 - 4 + 11 = 19$



$=$ valeur du flot φ_0

Flot net à travers une coupe

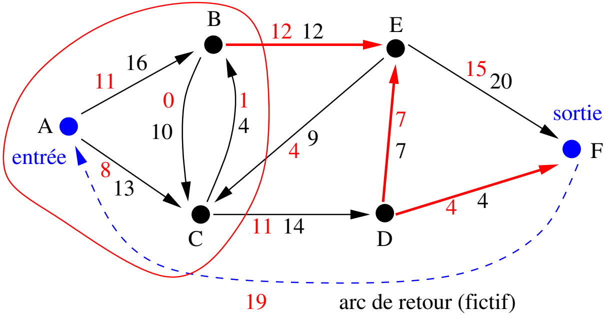
Somme algébrique des flux sur les arcs entre $\mathcal{E}$ et l'extérieur
$= 12 - 4 + 11 = 19$



$=$ valeur du flot φ_0

Corollaire important

- La valeur de n'importe quel flot réalisable est toujours inférieure ou égale à la capacité de n'importe quelle coupe.

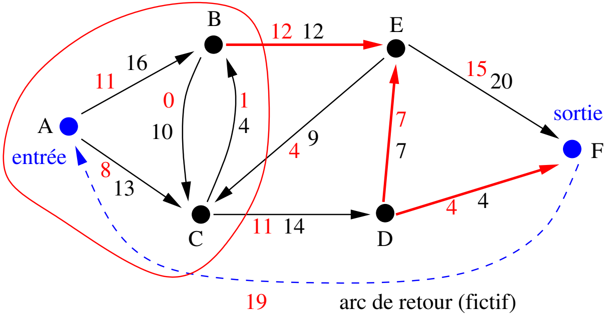


Capacité de la coupe = 26

Valeur du flot = 19

Corollaire important

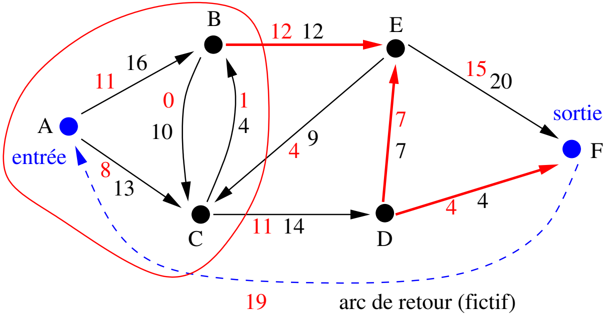
- La valeur de n'importe quel flot réalisable est toujours inférieure ou égale à la capacité de n'importe quelle coupe.



- La valeur d'un flot maximal est inférieure ou égale à la capacité de n'importe quelle coupe.

Corollaire important

- La valeur de n'importe quel flot réalisable est toujours inférieure ou égale à la capacité de n'importe quelle coupe.



- S'il y a égalité, c'est que le flot est maximal et la coupe est minimale.

Théorème de la coupe

Les trois énoncés suivants sont équivalents :

1. Le flot est maximal
2. Le graphe d'écart ne contient pas de chemin augmentant
3. La valeur du flot est égale à la capacité d'une coupe

On va vérifier que :

$$1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$$

- $1 \Longrightarrow 2$ OK
- $2 \Longrightarrow 3$? ? ?
- $3 \Longrightarrow 1$ OK

Théorème de la coupe

Les trois énoncés suivants sont équivalents :

1. Le flot est maximal
2. Le graphe d'écart ne contient pas de chemin augmentant
3. La valeur du flot est égale à la capacité d'une coupe

On va vérifier que :

$$1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$$

- $1 \Longrightarrow 2$ OK
- $2 \Longrightarrow 3$? ? ?
- $3 \Longrightarrow 1$ OK

Preuve de 2 $\Longrightarrow$ 3

- Hypothèse : Le graphe d'écart ne contient pas de chemin augmentant.
- Appelons $\mathcal{E}_0$ l'ensemble de sommets marqués par Ford-Fulkerson. Puisque l'algorithme ne peut plus progresser, c'est que
  - L'entrée appartient à $\mathcal{E}_0$, et la sortie n'y appartient pas : c'est donc une coupe.
  - Les arcs sortants de $\mathcal{E}_0$ sont forcément saturés.
  - Les arcs entrants de $\mathcal{E}_0$ ont forcément un flux nul.
- Conclusion : la coupe $\mathcal{E}_0$ est saturée : le flot (à travers la coupe) est égal à sa capacité.

Preuve de 2 $\Longrightarrow$ 3

- Hypothèse : Le graphe d'écart ne contient pas de chemin augmentant.
- Appelons $\mathcal{E}_0$ l'ensemble de sommets marqués par Ford-Fulkerson. Puisque l'algorithme ne peut plus progresser, c'est que
  - L'entrée appartient à $\mathcal{E}_0$, et la sortie n'y appartient pas : c'est donc une coupe.
  - Les arcs sortants de $\mathcal{E}_0$ sont forcément saturés.
  - Les arcs entrants de $\mathcal{E}_0$ ont forcément un flux nul.
- Conclusion : la coupe $\mathcal{E}_0$ est saturée : le flot (à travers la coupe) est égal à sa capacité.

Preuve de 2 $\Longrightarrow$ 3

- Hypothèse : Le graphe d'écart ne contient pas de chemin augmentant.
- Appelons $\mathcal{E}_0$ l'ensemble de sommets marqués par Ford-Fulkerson. Puisque l'algorithme ne peut plus progresser, c'est que
  - L'entrée appartient à $\mathcal{E}_0$, et la sortie n'y appartient pas : c'est donc une coupe.
  - Les arcs sortants de $\mathcal{E}_0$ sont forcément saturés.
  - Les arcs entrants de $\mathcal{E}_0$ ont forcément un flux nul.
- Conclusion : la coupe $\mathcal{E}_0$ est saturée : le flot (à travers la coupe) est égal à sa capacité.

Preuve de 2 $\Longrightarrow$ 3

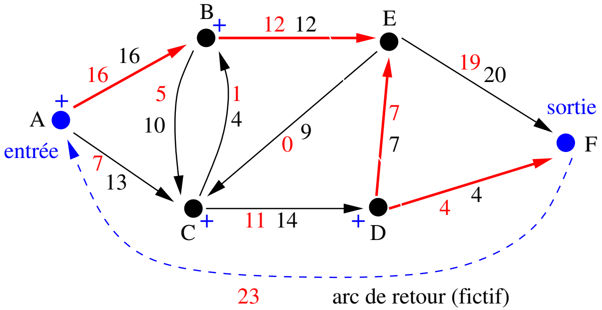
- Hypothèse : Le graphe d'écart ne contient pas de chemin augmentant.
- Appelons $\mathcal{E}_0$ l'ensemble de sommets marqués par Ford-Fulkerson. Puisque l'algorithme ne peut plus progresser, c'est que
  - L'entrée appartient à $\mathcal{E}_0$, et la sortie n'y appartient pas : c'est donc une coupe.
  - Les arcs sortants de $\mathcal{E}_0$ sont forcément saturés.
  - Les arcs entrants de $\mathcal{E}_0$ ont forcément un flux nul.
- Conclusion : la coupe $\mathcal{E}_0$ est saturée : le flot (à travers la coupe) est égal à sa capacité.

Preuve de 2 $\Longrightarrow$ 3

- Hypothèse : Le graphe d'écart ne contient pas de chemin augmentant.
- Appelons $\mathcal{E}_0$ l'ensemble de sommets marqués par Ford-Fulkerson. Puisque l'algorithme ne peut plus progresser, c'est que
  - L'entrée appartient à $\mathcal{E}_0$, et la sortie n'y appartient pas : c'est donc une coupe.
  - Les arcs sortants de $\mathcal{E}_0$ sont forcément saturés.
  - Les arcs entrants de $\mathcal{E}_0$ ont forcément un flux nul.
- Conclusion : la coupe $\mathcal{E}_0$ est saturée : le flot (à travers la coupe) est égal à sa capacité.

Conséquences

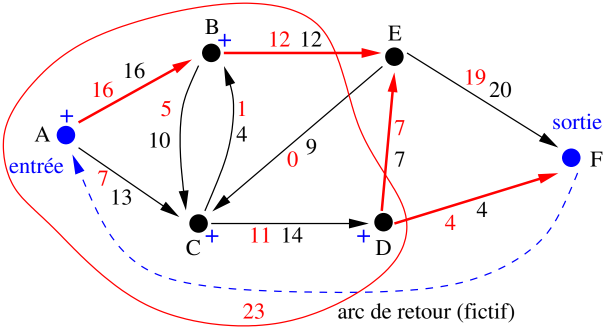
- L'algorithme de Ford-Fulkerson calcule bien un flot maximum
- Méthode de vérification : À la fin de l'algorithme de Ford-Fulkerson



Valeur du flot maximal = 23 = Capacité de la coupe donnée par les sommets marqués

Conséquences

- L'algorithme de Ford-Fulkerson calcule bien un flot maximum
- Méthode de vérification : À la fin de l'algorithme de Ford-Fulkerson



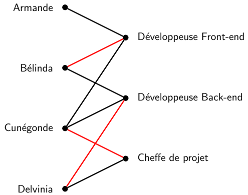
Valeur du flot maximal = 23 = Capacité de la coupe donnée par les sommets marqués

Sommaire

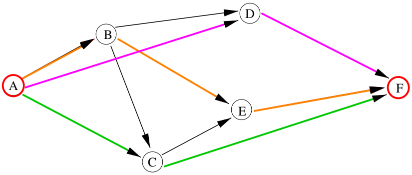
Conclusion

On peut modéliser certains problèmes par des flots et les résoudre avec Ford-Fulkerson :

- *Couplage maximum dans un graphe biparti* : sélectionner un ensemble d'arêtes d'un **graphe biparti**, de telle façon que chaque sommet soit touché **au plus une fois**.



- *Nombre maximum de chemins disjoints entre deux sommets*



Sommaire

Conclusion

Aujourd'hui nous avons vu :

- L'algorithme de Ford-Fulkerson pour calculer un flot maximal dans un réseau.
- Cet algorithme calcule une séquence de chemins augmentants à partir d'un flot donné (par exemple le flot nul).
- Un chemin augmentant permet d'augmenter le flot total (et pas forcément en « ouvrant tous les robinets »).
- Lorsqu'il s'arrête, cet algorithme détecte en fait une coupe de même capacité que le flot calculé.
- Par le théorème de la coupe il s'ensuit que la coupe est minimale et le flot maximal.
- Les implémentations efficaces de Ford -Fulkerson utilisent un parcours en largeur.