Colorations de graphes

Florent Foucaud - Malika More - Thibault Ralet
Carine Simon - Thierry Trévisan

1A - BUT Info - UCA

R207 Graphes

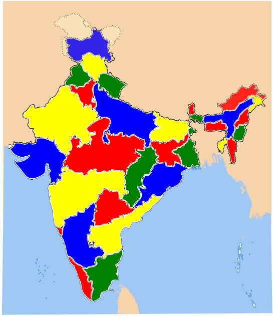
Année 2021-2022

Sommaire

Coloriages de cartes

Problème de géographie

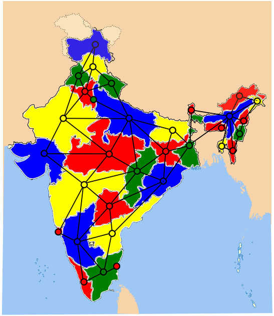
Colorier les régions d'une carte afin que deux régions adjacentes reçoivent des couleurs différentes. **But :** minimiser le nombre de couleurs.



Coloriages de cartes

Problème de graphes

Colorier les sommets d'un graphe afin que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes. **But :** minimiser le nombre de couleurs.



k-coloration propre d'un graphe G :
Fonction $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête xy de G, $f(x) \neq f(y)$

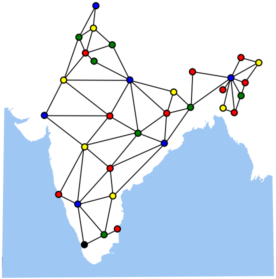
nombre chromatique $\chi(G)$ de G :
plus petit k tel que G a une k-coloration propre

graphe planaire :
qui peut être (re)dessiné sans croisement d'arêtes.

Coloriages de cartes

Problème de graphes

Colorier les sommets d'un graphe afin que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes. **But :** minimiser le nombre de couleurs.



k-coloration propre d'un graphe G :
Fonction $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête xy de G, $f(x) \neq f(y)$

nombre chromatique $\chi(G)$ de G :
plus petit k tel que G a une k-coloration propre

graphe planaire :
qui peut être (re)dessiné sans croisement d'arêtes.

Coloriages de cartes

Conjecture (des quatre couleurs - Guthrie, 1852)

Toute carte est proprement 4-coloriable.

Francis Guthrie, géographe britannique (1831-1899)

k-coloration propre d'un graphe G :
Fonction $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête xy de G, $f(x) \neq f(y)$

nombre chromatique $\chi(G)$ de G :
plus petit k tel que G a une k-coloration propre

graphe planaire :
qui peut être (re)dessiné sans croisement d'arêtes.

Coloriages de cartes

Théorème (des quatre couleurs - Appel & Haken, 1976)

Tout graphe planaire est proprement 4-coloriable.

Kenneth Appel, mathématicien américain (1932-2013)

Wolfgang Haken, mathématicien allemand (1928-)

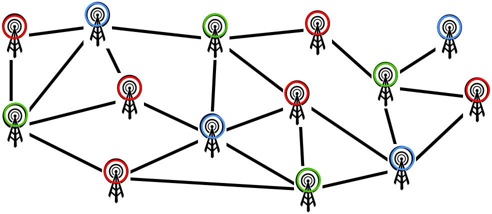
k-coloration propre d'un graphe G :
Fonction $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête xy de G, $f(x) \neq f(y)$

nombre chromatique $\chi(G)$ de G :
plus petit k tel que G a une k-coloration propre

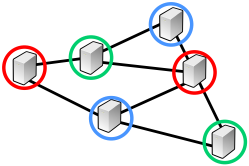
graphe planaire :
qui peut être (re)dessiné sans croisement d'arêtes.

D'autres applications

Assignation de fréquences dans un réseau de télécommunications



Ordonnancement de tâches en respectant des incompatibilités



Jeux

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Sommaire

Sommaire

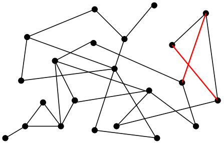
Introduction

Définition

- Un graphe est planaire si on peut le dessiner sur une feuille de sorte que deux arêtes ne se croisent pas.
- On dira qu'un tel dessin est planaire.

Question

Comment fait-on pour savoir si un graphe est planaire ?



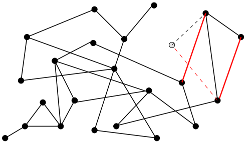
Introduction

Définition

- Un graphe est planaire si on peut le dessiner sur une feuille de sorte que deux arêtes ne se croisent pas.
- On dira qu'un tel dessin est planaire.

Question

Comment fait-on pour savoir si un graphe est planaire ?



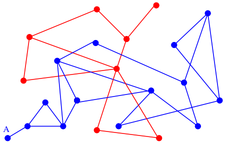
Introduction

Définition

- Un graphe est planaire si on peut le dessiner sur une feuille de sorte que deux arêtes ne se croisent pas.
- On dira qu'un tel dessin est planaire.

Question

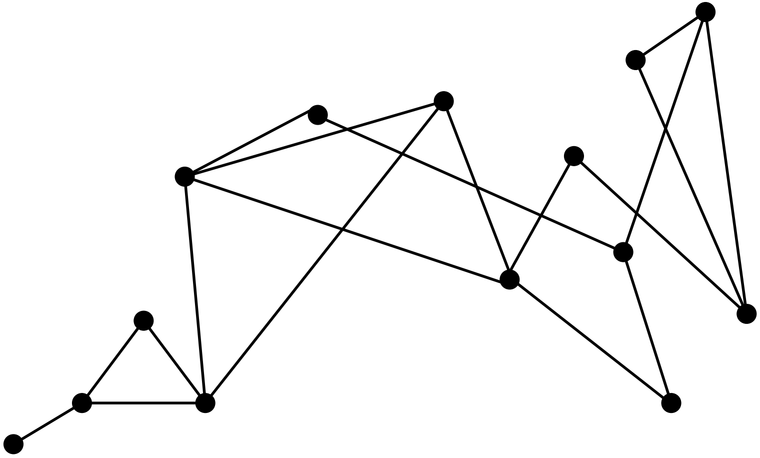
Comment fait-on pour savoir si un graphe est planaire ?



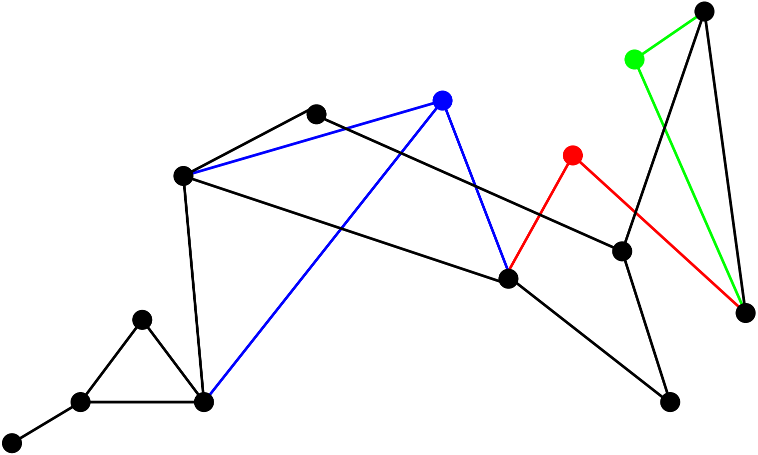
Remarque

Comme on peut dessiner séparément les composantes connexes, on va supposer à partir de maintenant que l'on travaille avec des graphes connexes.

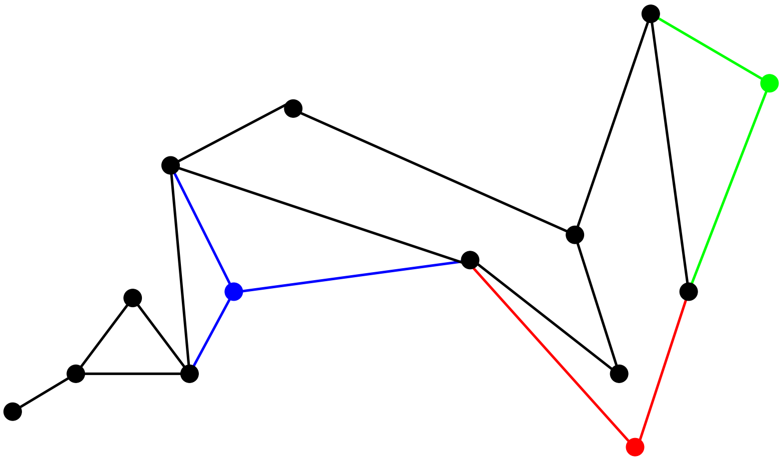
Planaire ? (oui)



Planaire ? (oui)



Planaire ? (oui)



Sommaire

Une notion centrale

Définition

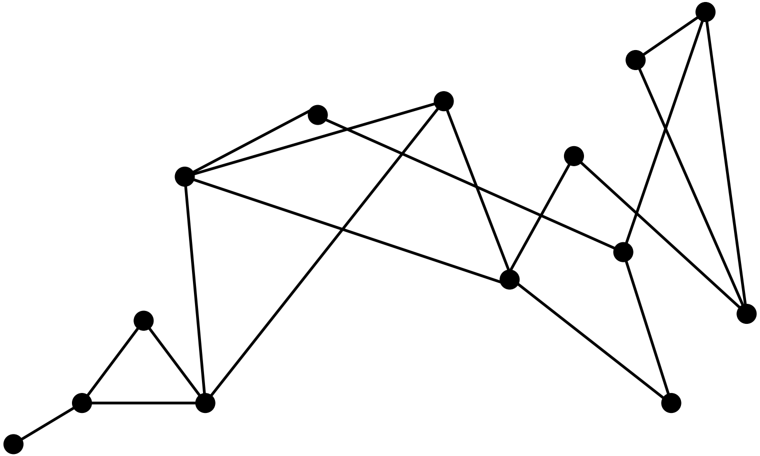
Le mineur d'un graphe G est un graphe obtenu à partir de G en utilisant les trois opérations suivantes.

- contraction d'arête. On choisit une arête $e = xy$ du graphe G et on fait comme si $x = y$ dans le nouveau graphe (en enlevant la "boucle").
- suppression d'arête. On enlève une arête e du graphe (mais sans la contracter).
- suppression de sommet. On enlève un sommet x et toutes les arêtes d'extrémité x.

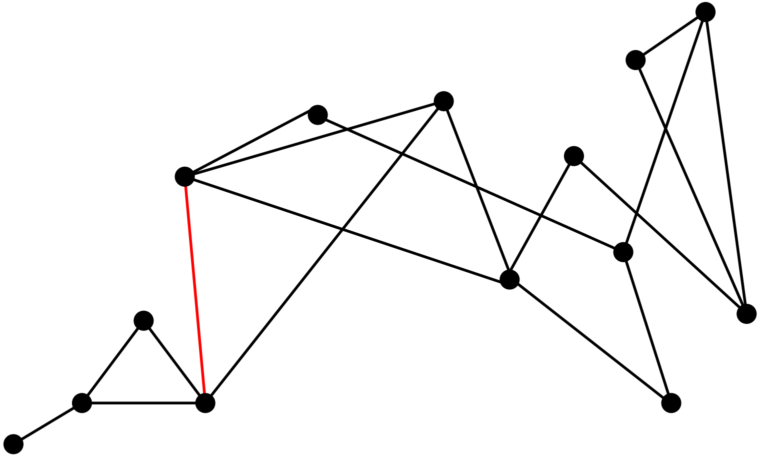
Remarque

Si un graphe est planaire, alors n'importe lequel de ses mineurs l'est aussi.

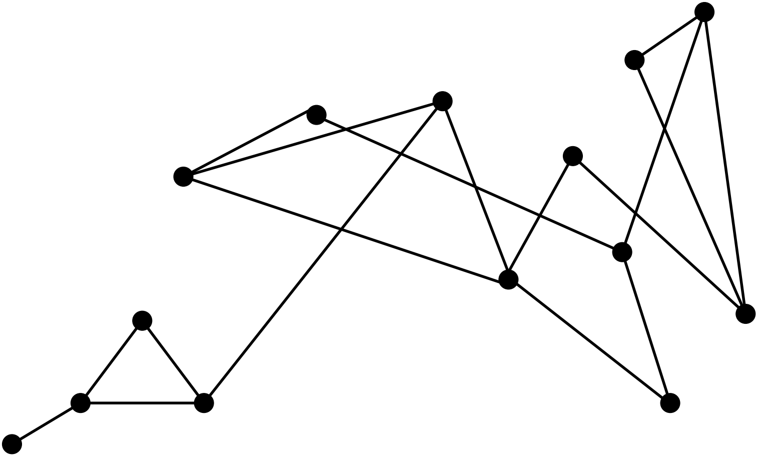
Suppression d’arête



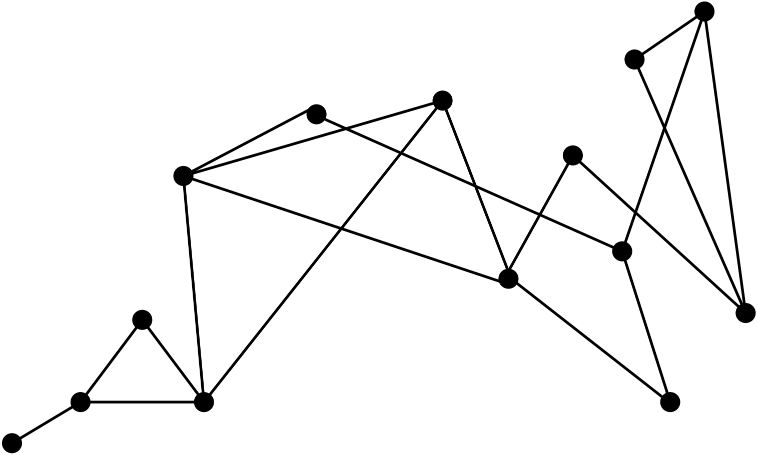
Suppression d'arête



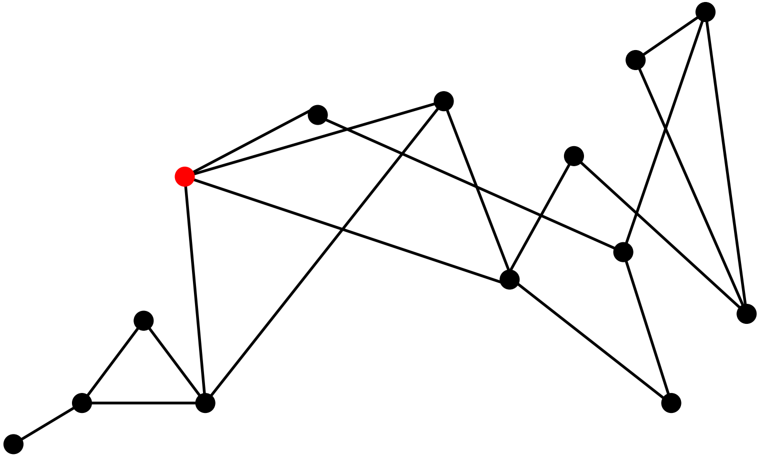
Suppression d'arête



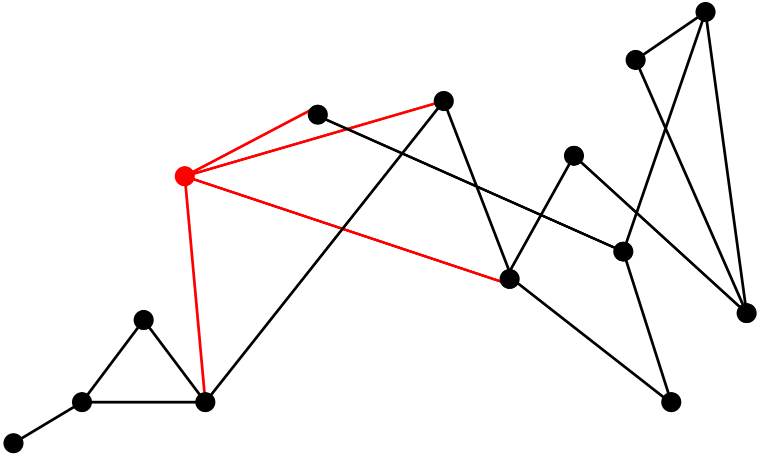
Suppression de sommet



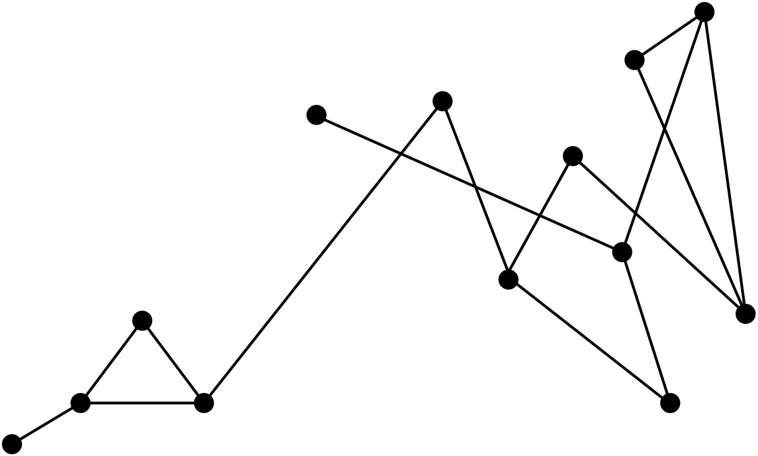
Suppression de sommet



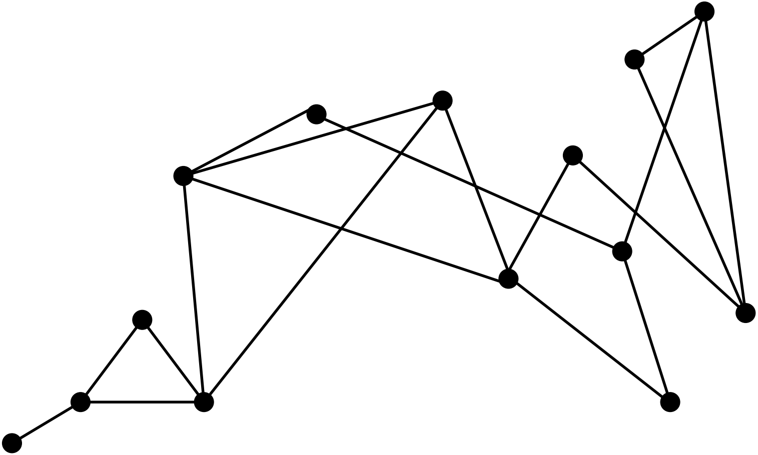
Suppression de sommet



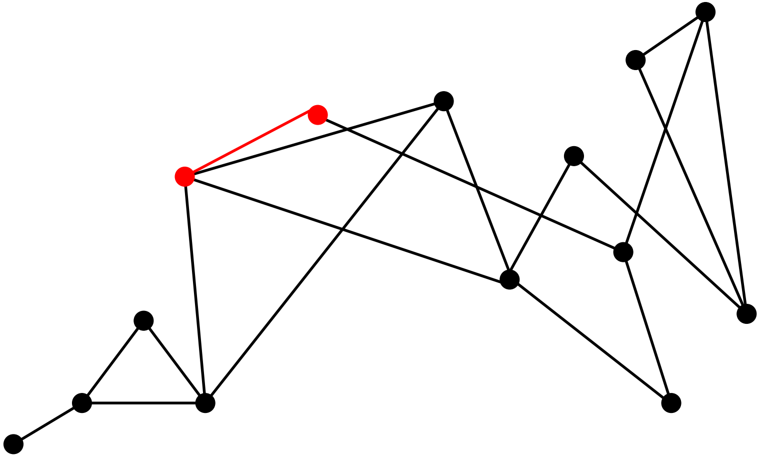
Suppression de sommet



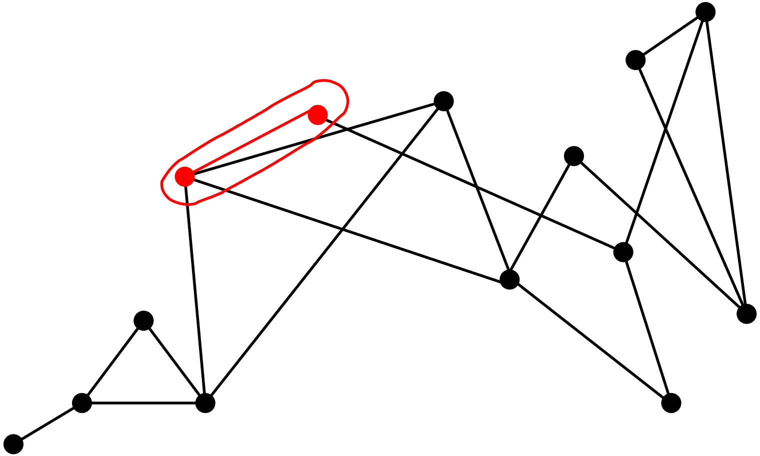
Contraction d'arête



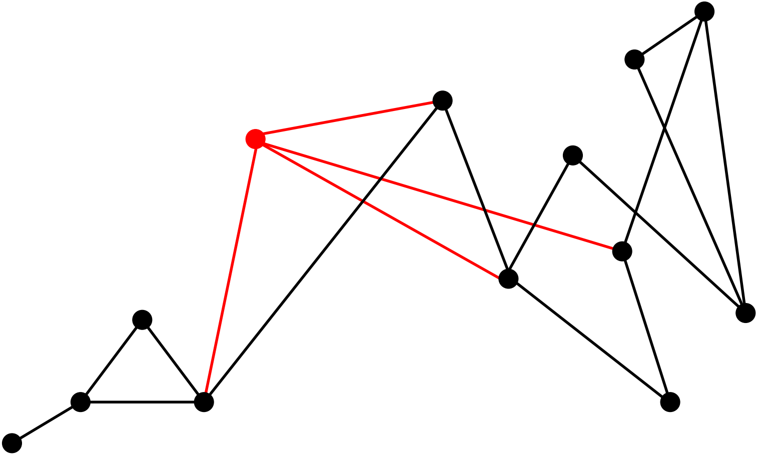
Contraction d'arête



Contraction d'arête



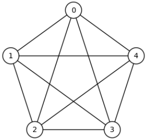
Contraction d’arête



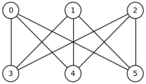
Caractérisation

Théorème (Kuratowski, 1930)

Un graphe n'est pas planaire si et seulement le graphe K_5 ou le graphe $K_{3,3}$ en est un mineur.



K_5



$K_{3,3}$

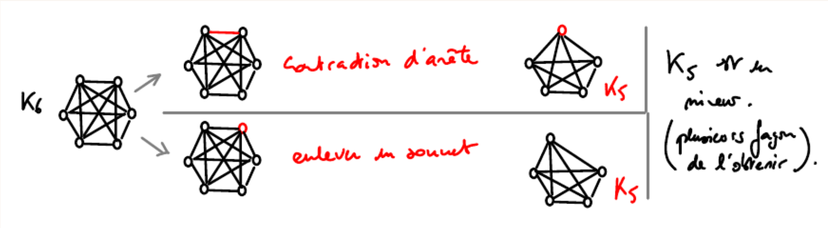
Kazimierz Kuratowski, mathématicien polonais (1896-1980)

Caractérisation

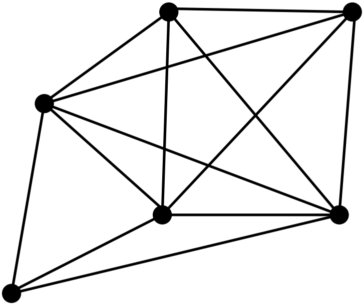
Théorème (Kuratowski, 1930)

Un graphe n'est pas planaire si et seulement le graphe K_5 ou le graphe $K_{3,3}$ en est un mineur.

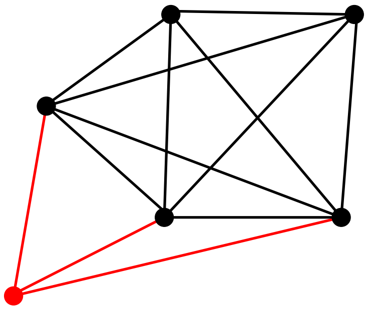
Exemple



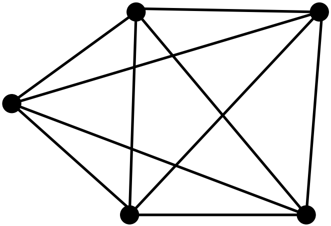
Planaire ? (non)



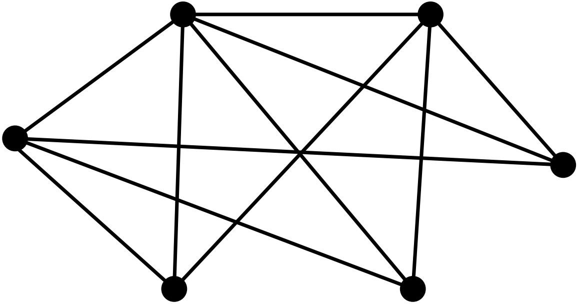
Planaire ? (non)



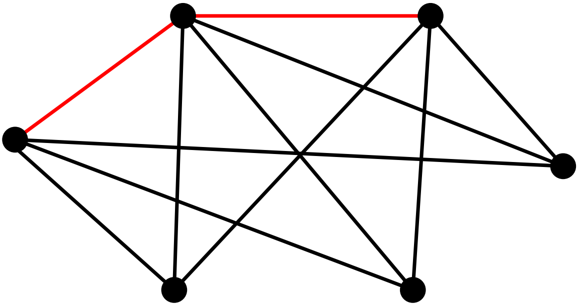
Planaire ? (non)



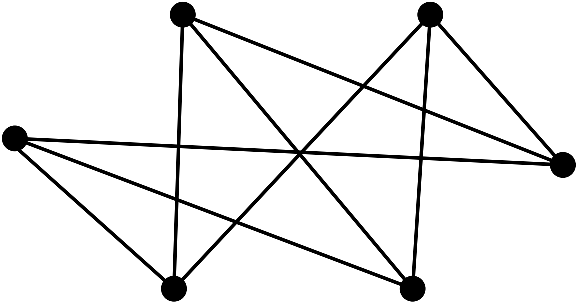
Planaire ? (non)



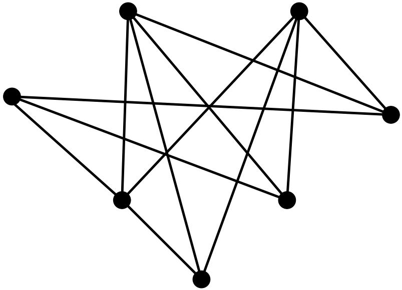
Planaire ? (non)



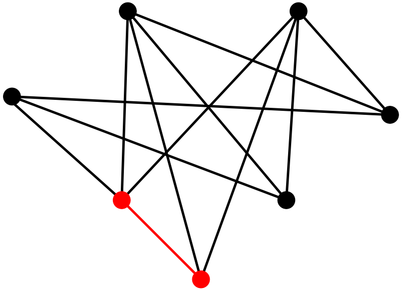
Planaire ? (non)



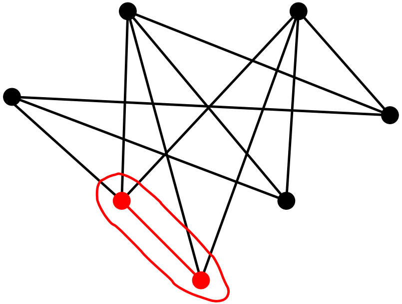
Planaire ? (non)



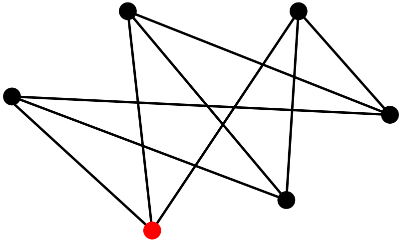
Planaire ? (non)



Planaire ? (non)



Planaire ? (non)



Sommaire

Sommaire

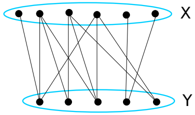
Graphes bipartis

Rappels :
k-coloration propre d'un graphe G : fonction $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête xy de G, $f(x) \neq f(y)$
nombre chromatique $\chi(G)$: plus petit k tq G a une k-coloration propre

Graphes bipartis

Rappels :
k-coloration propre d'un graphe G : fonction $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête xy de G, $f(x) \neq f(y)$
nombre chromatique $\chi(G)$: plus petit k tq G a une k-coloration propre

Un graphe est biparti si on peut partitionner ses sommets en deux ensembles X et Y de telle manière que toutes les arêtes relient X et Y (pas d'arête $X - X$ ou $Y - Y$).



Graphes bipartis

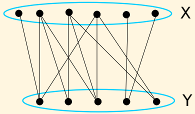
Rappels :
k-coloration propre d'un graphe G : fonction $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête xy de G, $f(x) \neq f(y)$
nombre chromatique $\chi(G)$: plus petit k tq G a une k-coloration propre

Un graphe est biparti si on peut partitionner ses sommets en deux ensembles X et Y de telle manière que toutes les arêtes relient X et Y (pas d'arête $X - X$ ou $Y - Y$).

Théorème

Pour un graphe G, les propositions suivantes sont équivalentes :

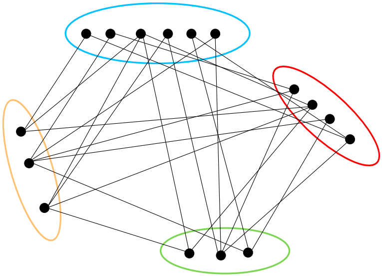
- *G est proprement 2-coloriable*
- *G est biparti*
- *G ne contient pas de cycle impair*



Graphes k-partis

Proposition

Un graphe est proprement k-coloriable si et seulement si il est k-parti.



Un graphe 4-parti

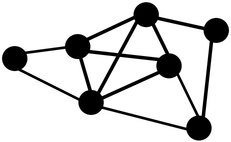
Sommaire

Les cliques

Définition (Clique d'un graphe)

Une clique d'un graphe est un ensemble de sommets reliés deux à deux.

Le nombre de clique $\omega(G)$ est la taille d'une plus grande clique de G.

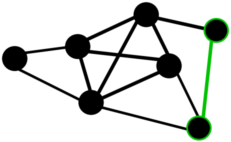


Les cliques

Définition (Clique d'un graphe)

Une clique d'un graphe est un ensemble de sommets reliés deux à deux.

Le nombre de clique $\omega(G)$ est la taille d'une plus grande clique de G.

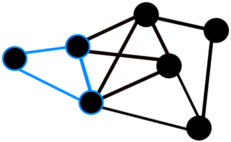


Les cliques

Définition (Clique d'un graphe)

Une clique d'un graphe est un ensemble de sommets reliés deux à deux.

Le nombre de clique $\omega(G)$ est la taille d'une plus grande clique de G.

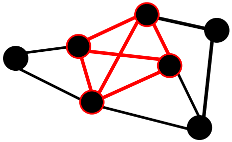


Les cliques

Définition (Clique d'un graphe)

Une clique d'un graphe est un ensemble de sommets reliés deux à deux.

Le nombre de clique $\omega(G)$ est la taille d'une plus grande clique de G.

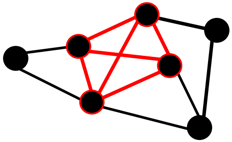


Les cliques

Définition (Clique d'un graphe)

Une clique d'un graphe est un ensemble de sommets reliés deux à deux.

Le nombre de clique $\omega(G)$ est la taille d'une plus grande clique de G.



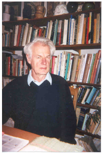
Proposition

Dans une coloration propre, les sommets d'une clique reçoivent forcément des couleurs différentes, et donc $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Graphes sans triangles

Théorème (Mycielski, 1955)

Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.

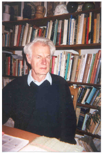


Jan Mycielski, mathématicien américano-polonais (1932-)

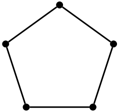
Graphes sans triangles

Théorème (Mycielski, 1955)

Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



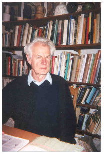
Jan Mycielski, mathématicien américano-polonais (1932-)



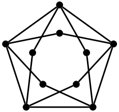
Graphes sans triangles

Théorème (Mycielski, 1955)

Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



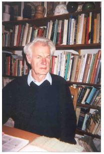
Jan Mycielski, mathématicien américano-polonais (1932-)



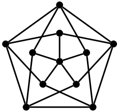
Graphes sans triangles

Théorème (Mycielski, 1955)

Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



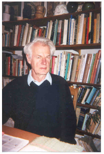
Jan Mycielski, mathématicien américano-polonais (1932-)



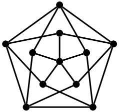
Graphes sans triangles

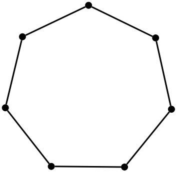
Théorème (Mycielski, 1955)

Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



Jan Mycielski, mathématicien américano-polonais (1932-)

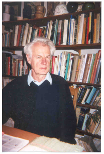




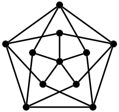
Graphes sans triangles

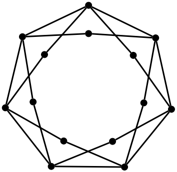
Théorème (Mycielski, 1955)

Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



Jan Mycielski, mathématicien américano-polonais (1932-)

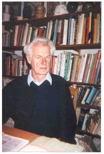




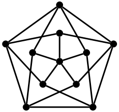
Graphes sans triangles

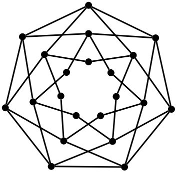
Théorème (Mycielski, 1955)

Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



Jan Mycielski,
mathématicien
américano-polonais
(1932-)

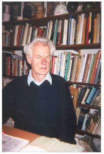




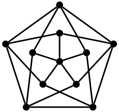
Graphes sans triangles

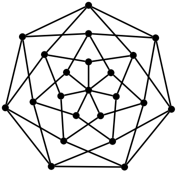
Théorème (Mycielski, 1955)

Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



Jan Mycielski, mathématicien américano-polonais (1932-)

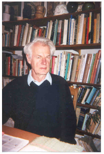




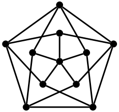
Graphes sans triangles

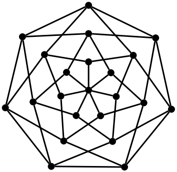
Théorème (Mycielski, 1955)

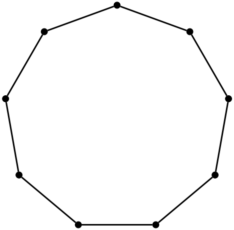
Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



Jan Mycielski, mathématicien américano-polonais (1932-)



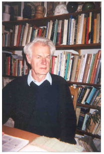




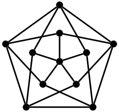
Graphes sans triangles

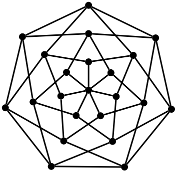
Théorème (Mycielski, 1955)

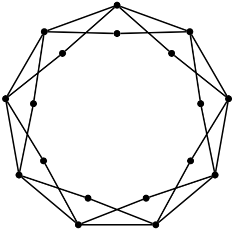
Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



Jan Mycielski,
mathématicien
américano-polonais
(1932-)



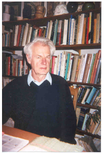




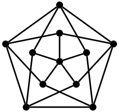
Graphes sans triangles

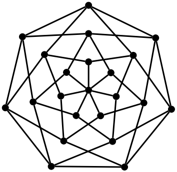
Théorème (Mycielski, 1955)

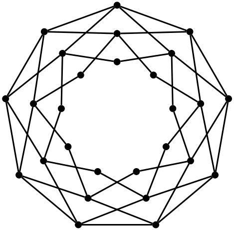
Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



Jan Mycielski,
mathématicien
américano-polonais
(1932-)



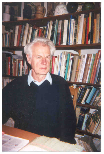




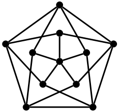
Graphes sans triangles

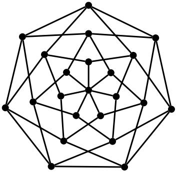
Théorème (Mycielski, 1955)

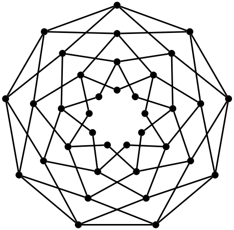
Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



Jan Mycielski, mathématicien américano-polonais (1932-)



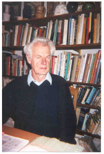




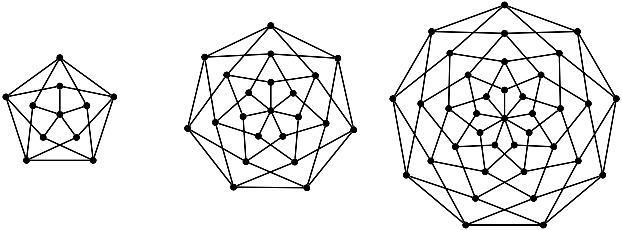
Graphes sans triangles

Théorème (Mycielski, 1955)

Il existe des graphes sans triangles (donc $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.



Jan Mycielski,
mathématicien
américano-polonais
(1932-)



Sommaire

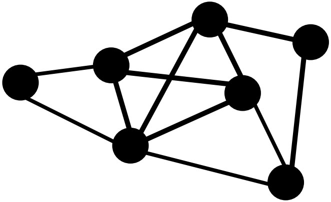
Sommaire

Algorithme glouton

- On utilise les entiers $1, 2, 3, 4, \ldots$ comme couleurs
- On considère les sommets un par un
- On attribue au sommet courant, la plus petite couleur possible

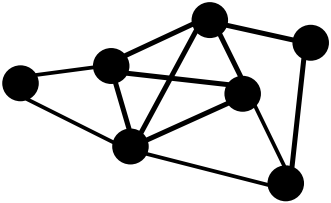
Algorithme glouton

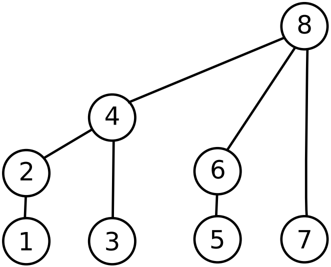
- On utilise les entiers $1, 2, 3, 4, \ldots$ comme couleurs
- On considère les sommets un par un
- On attribue au sommet courant, la plus petite couleur possible



Algorithme glouton

- On utilise les entiers $1, 2, 3, 4, \ldots$ comme couleurs
- On considère les sommets un par un
- On attribue au sommet courant, la plus petite couleur possible





Sommaire

Algorithme de Welsh-Powell

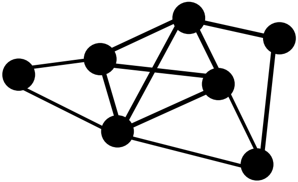
- On utilise les entiers $1, 2, 3, 4, \ldots$ comme couleurs
- On considère les sommets un par un, par ordre décroissant des degrés
- On attribue au sommet courant, la plus petite couleur possible

D.J.A. Welsh, mathématicien britannique (1938-)

Algorithme de Welsh-Powell

- On utilise les entiers $1, 2, 3, 4, \ldots$ comme couleurs
- On considère les sommets un par un, par ordre décroissant des degrés
- On attribue au sommet courant, la plus petite couleur possible

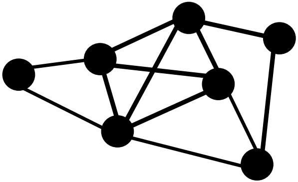
D.J.A. Welsh, mathématicien britannique (1938-)

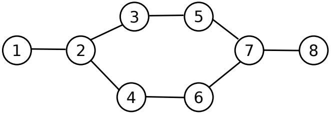


Algorithme de Welsh-Powell

- On utilise les entiers $1, 2, 3, 4, \ldots$ comme couleurs
- On considère les sommets un par un, par ordre décroissant des degrés
- On attribue au sommet courant, la plus petite couleur possible

D.J.A. Welsh, mathématicien britannique (1938-)





Sommaire

Algorithme de Brélaz : DSATUR

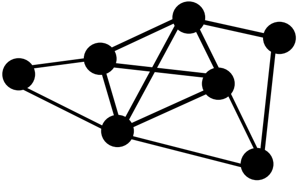
- On utilise les entiers $1, 2, 3, 4, \ldots$ comme couleurs
- On considère les sommets un par un, par ordre décroissant du nombre de couleurs présentes dans le voisinage (et par ordre décroissant des degrés si égalité)
- On attribue au sommet courant, la plus petite couleur possible

Daniel Brélaz, mathématicien et homme politique suisse (1950-)

Algorithme de Brélaz : DSATUR

- On utilise les entiers $1, 2, 3, 4, \ldots$ comme couleurs
- On considère les sommets un par un, par ordre décroissant du nombre de couleurs présentes dans le voisinage (et par ordre décroissant des degrés si égalité)
- On attribue au sommet courant, la plus petite couleur possible

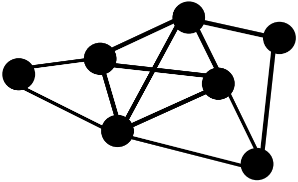
Daniel Brélaz, mathématicien et homme politique suisse (1950-)

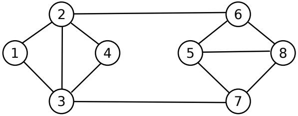


Algorithme de Brélaz : DSATUR

- On utilise les entiers $1, 2, 3, 4, \ldots$ comme couleurs
- On considère les sommets un par un, par ordre décroissant du nombre de couleurs présentes dans le voisinage (et par ordre décroissant des degrés si égalité)
- On attribue au sommet courant, la plus petite couleur possible

Daniel Brélaz, mathématicien et homme politique suisse (1950-)





Sommaire

Existe-t-il un bon algorithme de coloration ?

On peut tester toutes les colorations possibles, et vérifier chacune d'elles jusqu'à en trouver une correcte.

Existe-t-il un bon algorithme de coloration ?

On peut tester toutes les colorations possibles, et vérifier chacune d'elles jusqu'à en trouver une correcte.

Problème : c'est très très lent !

$\rightarrow$ le nombre de colorations est exponentiel en le nombre de sommets.

Existe-t-il un bon algorithme de coloration ?

On peut tester toutes les colorations possibles, et vérifier chacune d'elles jusqu'à en trouver une correcte.
Problème : c'est très très lent !
$\rightarrow$ le nombre de colorations est exponentiel en le nombre de sommets.

Théorème

On conjecture qu'il n'existe aucun algorithme efficace[a] *pour colorier un graphe de façon optimale (même pour les graphes 3-coloriables).*

---

a. Qui exécute un nombre d'étapes qui est polynomial en la taille du graphe

Existe-t-il un bon algorithme de coloration ?

On peut tester toutes les colorations possibles, et vérifier chacune d'elles jusqu'à en trouver une correcte.
Problème : c'est très très lent !
→ le nombre de colorations est exponentiel en le nombre de sommets.

Théorème

On conjecture qu'il n'existe aucun algorithme efficace[a] *pour colorier un graphe de façon optimale (même pour les graphes 3-coloriables).*

a. Qui exécute un nombre d'étapes qui est polynomial en la taille du graphe

Problème (P versus NP - une question à 1 million de $)

P : problèmes qu'on peut résoudre exactement en temps polynomial
NP : problèmes pour lesquels on peut vérifier la validité d'une solution en temps polynomial

Question : Est-ce que $P = NP$? *(On pense que non.)*