Université Clermont Auvergne
BUT Info 1A
R207 - Graphes
Année 2021-2022

Florent Foucaud
Malika More
Thibault Ralet
Carine Simon
Thierry Trévisan

Graphes
Introduction

1 Définitions

1.1 Vocabulaire

Quels mots employer ?
- Comme pour tout domaine des mathématiques, il existe un vocabulaire assez précis concernant les graphes.
- Nous n'allons pas nous étendre sur le vocabulaire de base concernant les sommets, les arcs/arêtes et leur relation qui est assez facile à retenir.
- Pour vous familiariser avec le vocabulaire de base, voyez la section à la fin de ce cours.
- Nous allons maintenant passer à des notions plus importantes.

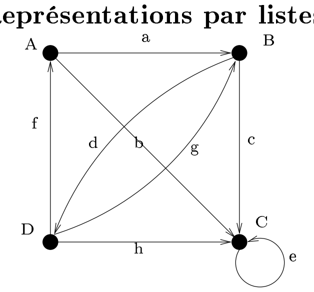
1.2 Représentation d'un graphe

Question Comment représenter un graphe afin de le coder en machine ?

Remarque. La démarche est la même dans le cas d'un graphe orienté ou non. En effet, un graphe (non orienté) est vu comme un graphe orienté où on a un arc dans les deux sens pour chaque arête.

Réponse Il y a plusieurs solutions.
- avec des listes
- avec des matrices

Représentations par listes (graphes orientés)



Listes de successeurs

sommet	successeurs
A	B, C
B	C, D
C	C
D	A, B, C

Remarques.
- Alternative : *listes de prédécesseurs.*
- Pour un graphe non-orienté, on prend simplement *la liste des voisins.*

Représentation par Matrice (graphes orientés)

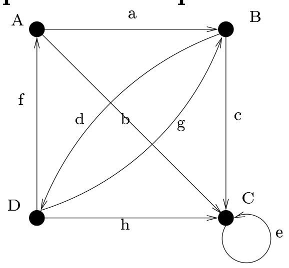


Tableau d'adjacence

$_{origine}\backslash^{fin}$	A	B	C	D
A		a	b	
B			c	d
C			e	
D	f	g	h	

Matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Plusieurs matrices d'adjacence pour un même graphe

Exemple. Pour l'ordre B, A, C, D

	B	A	C	D
B	0	0	1	1
A	1	0	1	0
C	0	0	1	0
D	1	1	1	0

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. On peut aussi utiliser les matrices pour représenter des graphes non orientés, et en adaptant un petit peu on peut représenter des graphes ayant plusieurs arcs ou arêtes (multigraphes) ou encore des graphes avec des poids sur les arcs.

2 Graphes non orientés

2.1 Cas particuliers

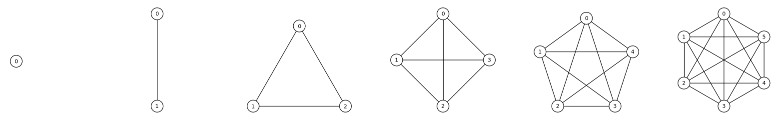
Graphe complet ou Clique

Définition. Les sommets sont tous voisins deux à deux

- nombre de sommets : $n \geqslant 1$
- nombre d'arêtes : $\binom{n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2}$
- notation : K_n

Exemple.

K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6



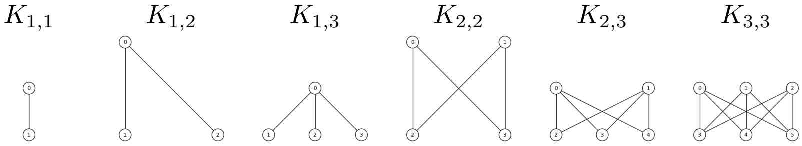
Graphe biparti complet

Définition. Deux paquets non-vides de sommets P et Q et toutes les arêtes entre ces deux paquets.

- nombre de sommets : $p + q$ (avec $p \geqslant 1, q \geqslant 1$)
- nombre d'arêtes : $p.q$
- notation : $K_{p,q}$

Exemple.

$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{1,3}$ $K_{2,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$



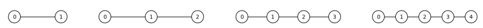
Chaîne (élémentaire)

Définition. Les sommets forment une ligne
- nombre de sommets : $n \geqslant 2$
- nombre d'arêtes : $n-1$
- notation : P_n (P comme « *path* »)

On dit que P_n est une chaîne de *longueur* $n-1$.

Exemple.

P_2 P_3 P_4 P_5

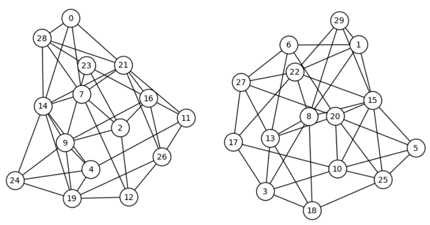


2.2 Chaînes et connexité

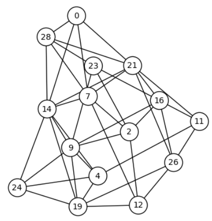
Définition.
- Un sommet y est *accessible* depuis un sommet x si il existe une chaîne ayant pour extrémités x et y.
- Un graphe est *connexe* si pour toute paire (x, y) de sommet distincts y est accessible depuis x.
- La *composante connexe* d'un sommet x est le sous-graphe induit par l'ensemble des sommets accessibles depuis x.

Connexité

Exemple.
- Ce graphe n'est pas connexe



- Le sommet 26 est accessible depuis 0.
- Le sommet 1 n'est pas accessible depuis 0.
- Il a 2 composantes connexes.
- La composante connexe de 0 est le graphe suivant.



2.3 Cycles et Arbres

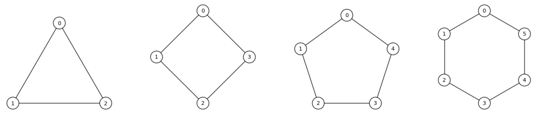
Cycle

Définition. Une chaîne P_n à laquelle on ajoute l'arête $n-1, 0$.
- nombre de sommets : $n \geqslant 3$
- nombre d'arêtes : n
- notation : C_n

On dit que C_n est un cycle de *longueur* n.

Exemple.

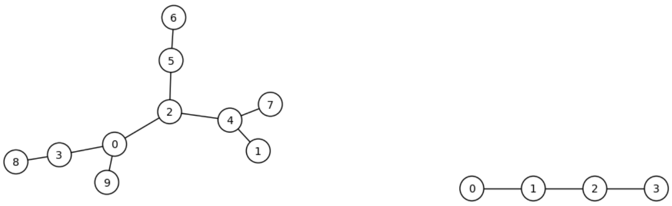
C_3 C_4 C_5 C_6



Arbre

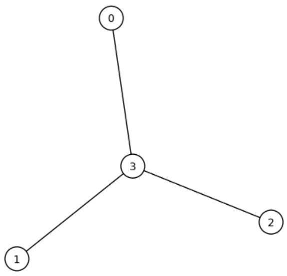
Définition. Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Un sommet de degré 1 d'un arbre est une *feuille*.

Exemple.



Étoile

Définition. Une *étoile* est un arbre avec au plus un seul sommet qui n'est pas une feuille. L'étoile à n feuilles est notée S_n.



L'étoile S_3

Les arbres cachent la forêt

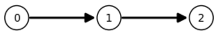
Définition. Une *forêt* est un graphe sans cycle (pas forcément connexe).

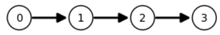
Exemple.

3 Graphes orientés

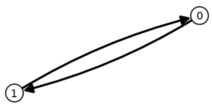
Quelques famille de graphes orientés

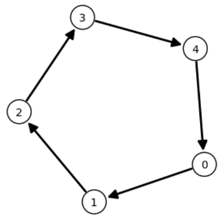
Chemins orientés



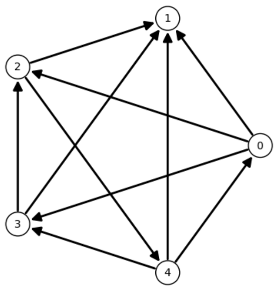


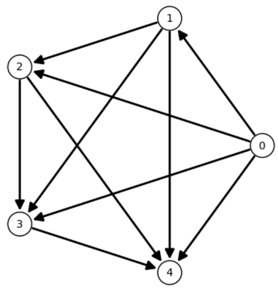
Cycles orientés





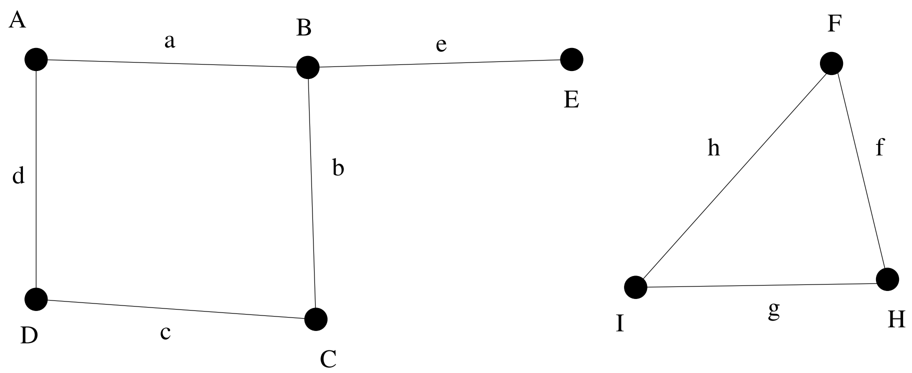
Tournoi





Vocabulaire

Un graphe



« Définition » par l'exemple

- le graphe est constitué
  - des *sommets* $\{A, B, C, D, E, F, H, I\}$
  - des *arêtes* $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- les sommets A et B sont les *extrémités* de l'arête a
- Le graphe est *simple* car il n'a pas d'*arêtes multiples* (arêtes avec les mêmes dexu extrémités) ni de *boucles* (arête dont les deux extrémités sont les mêmes)

- les sommets A et B sont *voisins*
- l'ensemble des sommets voisins du sommet A est $\{B, D\}$
- le *degré* du sommet A est 2.
- l'arête a est *incidente* au sommet A
- l'ensemble des arêtes incidentes au sommet A est $\{a, d\}$
- $AaBeE$ est une *chaîne* de notre graphe.
- les *extrémités* de cette chaîne sont A et E.
- les *sommets* de la chaîne sont A, B et E.
- les *arêtes* de la chaîne sont a et e.
- la *longueur* de la chaîne est 2.
- en général, on parle en raccourci de la "chaîne ABE".
- E est *accessible* à partir de A et A est accessible à partir de E.
- $ABCDA$ est un *cycle* de notre graphe.
- $ABCDA$ est isomorphe au graphe C_4 et il est donc de taille 4.
- **Attention** : les arêtes doivent être distinctes, c.-à-d. que ABA n'est pas un cycle.
- la longueur minimale d'un cycle est 3.
- *composante connexe* : ensemble maximal de sommets mutuellement accessibles.
- les composantes connexes de notre graphe sont $\{A, B, C, D, E\}$ et $\{F, H, I\}$.
- un graphe est *connexe* si tous les sommets sont mutuellement accessibles (c.-à-d. graphe constitué d'une seule composante connexe).
- notre graphe n'est pas connexe puisqu'il est constitué de deux composantes connexes.