Université Clermont Auvergne
BUT Info 1A
R207 Graphes
Année 2021-2022

Florent Foucaud
Malika More
Thibault Ralet
Carine Simon
Thierry Trévisan

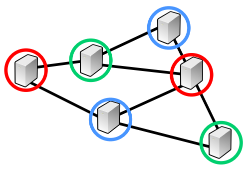
Colorations propres et planarité

1 Colorations

1.1 Introduction

Définition Une *coloration propre* d'un graphe G non-orienté est une fonction qui attribue à chaque sommet de G une valeur (appelée couleur) de telle façon que deux sommets adjacents (reliés par une arête) reçoivent deux couleurs différentes. Formellement, une k-coloration propre d'un graphe G est une fonction $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête xy de G, $f(x) \neq f(y)$.

Le *nombre chromatique* d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le plus petit nombre de couleurs possible dans une coloration de G.



Une 3-coloration d'un graphe

Applications des colorations : assignation de ressources via une modélisation par des graphes de conflit (deux entités ne pouvant pas être attribuées à la même ressource sont reliées par une arête, chaque couleur représente une ressource). Par exemple, l'assignation de fréquences dans un réseau de capteurs, la répartition des salles de classes dans l'emploi du temps à l'IUT, l'attribution de tâches aux processeurs d'un supercalculateur...

1.2 Cliques

Une *clique* est un ensemble de sommets qui sont reliés deux à deux. Dans une clique, tous les sommets doivent recevoir une couleur différente si on colorie proprement le graphe. La taille d'une plus grande clique de G est notée $\omega(G)$. On a donc :

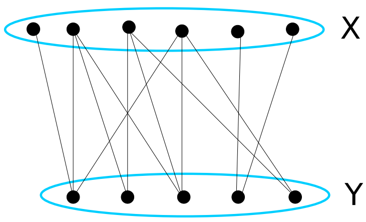
Propriété. *Dans tout graphe G, on a forcément $\chi(G) \geqslant \omega(G)$.*

Cependant, il existe des graphes avec de petites cliques mais où le nombre chromatique est très grand :

Théorème (Mycielski, 1955)**.** *Il existe des graphes G sans triangles (donc avec $\omega(G) = 2$) et de nombre chromatique aussi grand qu'on veut.*

1.3 Graphes bipartis

Un graphe est *biparti* si on peut partitionner l'ensemble de sommets en deux parties X et Y de telle façon que toutes les arêtes relient un sommet de X à un sommet de Y.



De plus, un graphe est biparti si est seulement tous ses cycles sont de longueur paire. Les sommets d'un graphe peuvent être colorés proprement avec deux couleurs si et seulement il est biparti.

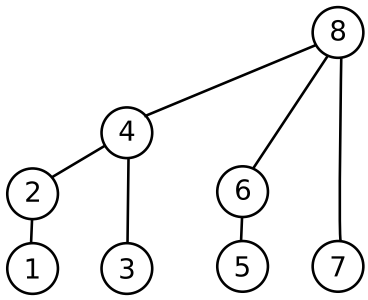
Colorier un graphe avec deux couleurs peut être fait de façon efficace, il suffit de détecter si le graphe est biparti. Pour cela on peut parcourir le graphe (avec un parcours de notre choix, de préférence un parcours en largeur pour faciliter la question 2) et successivement mettre les sommets dans une liste X et une liste Y (si on considère un sommet X, tous ses voisins seront dans Y, et vice-versa). Si on détecte une arête $X - X$ ou $Y - Y$, la réponse est NON. Si cela n'arrive jamais, la réponse est OUI.

1.4 Algorithmes

Dans l'*algorithme glouton* de coloration de graphes, on représente chaque couleur par un nombre entier (au moins 1). On parcourt les sommets, et pour chaque sommet, on lui attribue la plus petite couleur non encore présente parmi ses voisins. On en déduit le théorème suivant (en effet tout sommet de degré d recevra une couleur au plus $d + 1$ dans cet algorithme).

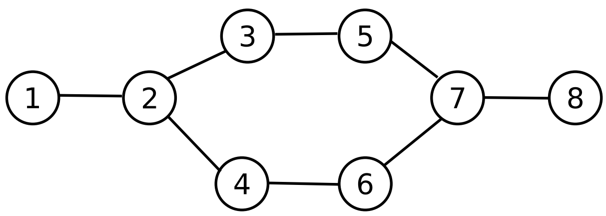
Théorème. *On peut colorier tout graphe G avec au plus $D + 1$ couleurs, où D est le degré maximum d'un sommet de G.*

L'algorithme glouton est assez rapide, mait il peut renvoyer une très mauvaise coloration si on n'a pas de chance sur l'ordre des sommets. C'est le cas sur l'exemple suivant, quand on suit l'ordre donné par les numéros des sommets.



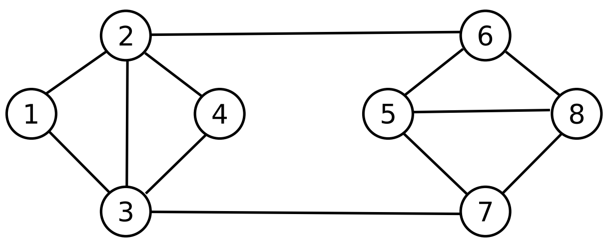
L'*algorithme de Welsh-Powell* améliore cela en colorant les sommets par ordre décroissant de leur degré. Contrairement à l'algorithme glouton simple, il renvoie un résultat optimal pour les graphes bipartis.

Toutefois, cet algorithme aussi peut renvoyer une mauvaise coloration pour certains graphes. C'est le cas sur l'exemple suivant.



L'*algorithme de Brélaz*, aussi appelé DSATUR, est une modification de celui de Welsh-Powell. Cette fois-ci, on ne considère plus les sommets dans l'ordre décroissant selon les degrés, mais selon l'ordre décroissant du nombre de couleurs différentes qu'ils ont dans leur voisinage. Cette valeur est appelée la *saturation* du sommet. (En cas d'égalité, on privilégie les sommets de plus grand degré.)

L'algorithme DSATUR peut cependant renvoyer une mauvaise coloration pour certains graphes. C'est le cas sur l'exemple suivant.



En réalité, trouver une coloration optimale de n'importe quel graphe donné en paramètre est un problème difficile et il n'existe aucun algorithme *efficace*[1] pour le faire (on conjecture même qu'un algorithme efficace qui décide si un graphe est 3-coloriable ou pas, n'existe pas : c'est le célèbre Problème de savoir si $P = NP$.

Cependant, un algorithme correct mais très lent[2] consiste à générer exhaustivement toutes les k-colorations possibles d'un graphe (pour un nombre de couleurs k fixé), et à les tester une par une. On en trouvera forcément une si elle existe, sinon, on peut incrémenter k et recommencer.

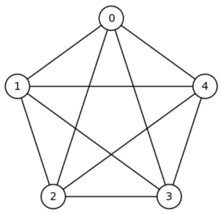
2 Graphes planaires

Définition. Un graphe est planaire si on peut le dessiner sans croisement d'arêtes.

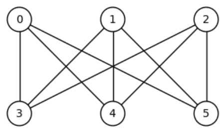
Le *mineur* d'un graphe G est un graphe obtenu à partir de G en utilisant les trois opérations suivantes.

- *contraction d'arête.* On choisit une arête $e = xy$ du graphe G et on fait comme si $x = y$ dans le nouveau graphe (en enlevant la "boucle").
- *suppression d'arête.* On enlève une arête e du graphe (mais sans la contracter).
- *suppression de sommet.* On enlève un sommet x et toutes les arêtes d'extrémité x.

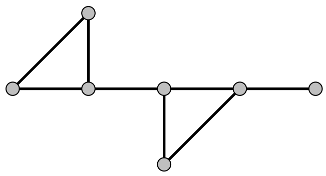
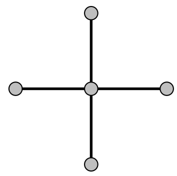
Théorème (Kuratowski, 1930) : Un graphe n'est pas planaire si et seulement le graphe K_5 ou le graphe $K_{3,3}$ en est un mineur.



K_5

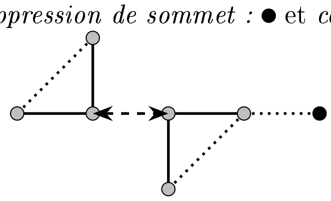


$K_{3,3}$

Exemple : Voici un graphe G  et un mineur de G : 

obtenu après :

suppression d'arêtes : ...., *suppression de sommet :* ● et *contraction d'arêtes :* ◄- - -► :



1. Un algorithme est communément considéré être effiace si le nombre d'étapes exécutées dans le pire des cas est proportionnel à un polynôme en la taille du graphe.
2. Le nombre d'étapes exécutées sera exponentiel en la taille n du graphe, environ k^n.