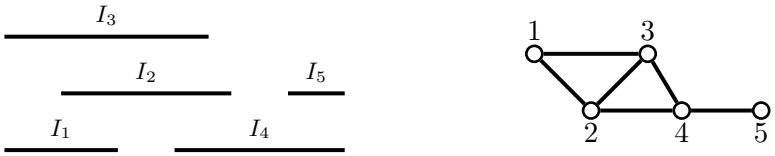
Université Clermont Auvergne
BUT Info 1A
R207 Graphes
Année 2021-2022

Florent Foucaud
Malika More
Thibault Ralet
Carine Simon
Thierry Trévisan

Applications à l'ordonnancement

1 Coloration de graphes d'intervalles

Définition. Étant donné un ensemble d'intervalles en une dimension, on crée un graphe en faisant correspondre à chaque intervalle un sommet du graphe. Deux sommets sont reliés par une arête si leurs intervalles s'intersectent.



Motivation

Les intervalles peuvent représenter des données avec des contraintes temporelles : des tâches sur un supercalculateur avec une certaine heure de début et de fin, la période de cultures agricoles, les cours à l'IUT...

Coloration

Pour affecter des ressources aux objets qui correspondent aux différents intervalles, on peut vouloir colorier le graphe associé.

Pour colorier un graphe d'intervalles de façon optimale, on utilise l'algorithme glouton vu au cours précédent, en considérant les sommets de gauche à droite dans l'ordre de leurs intervalles respectifs.

Théorème. *L'algorithme glouton ci-dessus calcule une coloration optimale de tout graphe d'intervalle G. De plus, on a $\chi(G) = \omega(G)$.* [1]

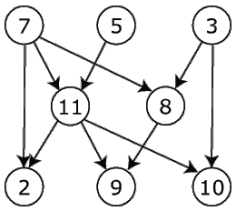
Tous les graphes ne sont pas des graphes d'intervalles, par exemple, un cycle de longueur au moins 4 n'en est pas un.

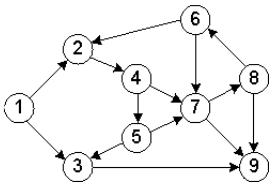
1. On rappelle que $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de G, et $\omega(G)$, la taille d'une plus grande clique dans G.

2 Ordres topologiques de graphes orientés acycliques

2.1 Graphe orienté acyclique

Définition. Un **graphe orienté acyclique** (en anglais, **DAG** : *directed acyclic graph*) est un graphe orienté qui ne possède aucun cycle (c'est-à-dire, une chaîne orientée partant d'un sommet pour y revenir).





Le graphe de gauche est acyclique, tandis que celui de droite possède un cycle (6 - 7 - 8).

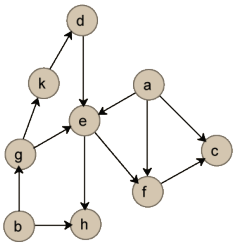
Typiquement, un graphe orienté acyclique représente un *problème d'ordonnancement de tâches* : un sommet correspond à une tâche et un arc (u, v) indique la contrainte de précédence « *la tâche u doit être terminée avant que la tâche v ne puisse commencer* ». Nous verrons des exemples dans les exercices.

2.2 Ordre topologique

Définition. Soit G un graphe orienté acyclique. Un ordre $<$ sur les sommets est dit **topologique** s'il *respecte toutes les arêtes du graphe*. C'est-à-dire :

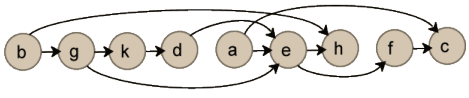
$$\text{Pour tout arc } (u, v) \text{ de } G, \text{ on a } \quad u < v.$$

Exemple : Voici un graphe orienté acyclique, et un ordre topologique correspondant.



$$b < g < k < d < a < e < h < f < c$$

Graphiquement, il est très facile de voir qu'il s'agit bien d'un ordre topologique, car les arcs sont tous orientés de la gauche vers la droite.



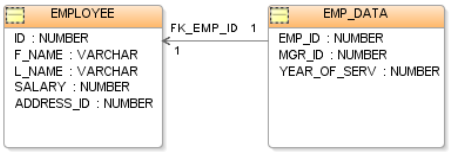
Remarque 1 : Un même graphe peut admettre *plusieurs ordres topologiques* différents.

Remarque 2 : Évidemment, si le graphe contient un cycle, il est impossible de trouver un ordre topologique sur les sommets.

2.3 Motivation

Clés étrangères en bases de données

- Dans les bases de données relationnelles (Oracle, MySql, PostgreSQL, etc), il existe des contraintes entres les tables
- Une (ou plusieurs colonnes) d'une table font référence à une (ou plusieurs colonnes) d'une autre table
- Ces contraintes permettent de garantir l'intégrité des données
- On parle de *clés étrangères*.



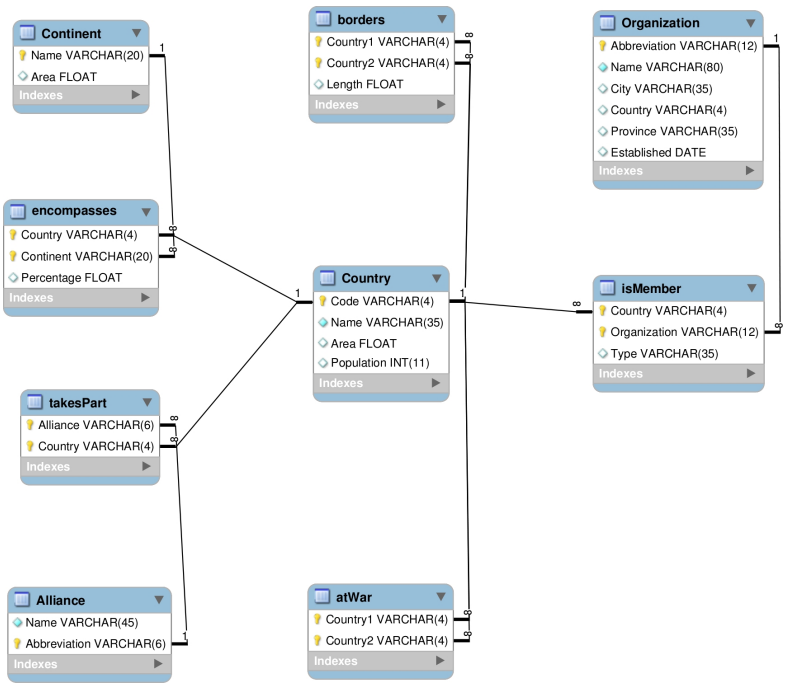
Suppression de tables dans une base de données

Problème. On désire supprimer des tables dans une base de données

Obstacle. Lorsqu'une table est référencée dans une autre table à l'aide d'une clé étrangère, on ne peut pas la détruire

Question. Peut-on toujours trouver un ordre adapté pour supprimer des tables dans une base ayant des clés étrangères ? Si c'est le cas, comment faire pour trouver un tel ordre ?

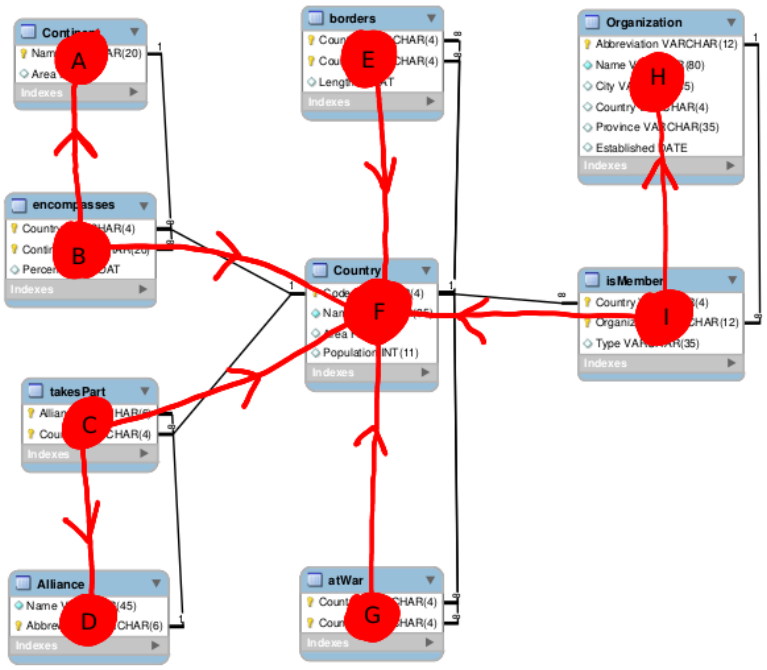
Exemple



- Notation UML : la table fille du côté marqué ∞, la table mère est du côté marqué 1.
- La référence va de la fille vers la mère (de ∞ vers 1).

BD et Ordre Topologique

Il s'agit de construire un graphe orienté sans cycle dont un ordre topologique représente un ordonnancement valide des destructions des tables de la base de données.

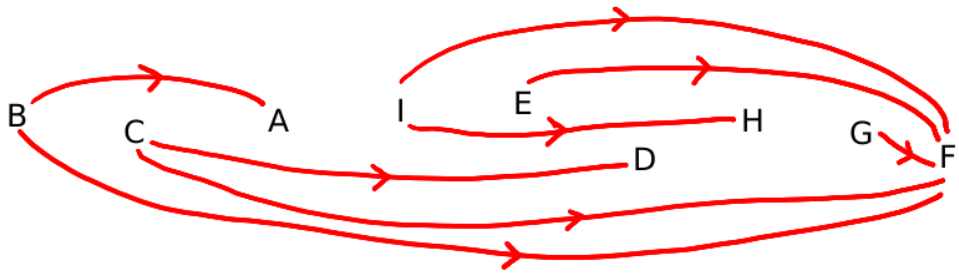


Il ne reste plus qu' à calculer un ordre topologique et en déduire un ordre possible de destruction des tables.

3 Algorithme pour les humains et les petits graphes

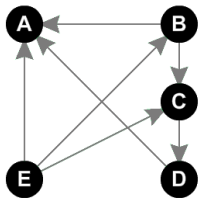
1. Trouver dans le graphe un sommet S qui n'a pas de prédécesseur
2. Placer S à la suite de la liste ordonnée des sommets obtenue jusqu'ici
3. Supprimer le sommet S du graphe
4. Recommencer tant qu'il y a des sommets dans le graphe
5. La liste ordonnée des sommets ainsi obtenue est un ordre topologique pour le graphe initial

Par exemple : B - C - A - I - E - D - H - G - F

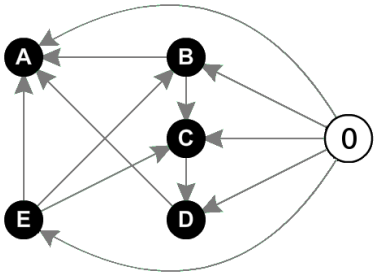


4 Algorithme plus efficace basé sur un parcours en profondeur

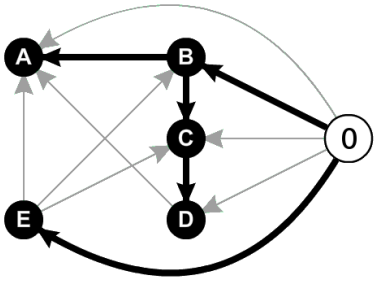
Étant donné un graphe orienté acyclique G, on peut toujours lui trouver un ordre topologique, avec la méthode suivante.



Tout d'abord, on rajoute un sommet « source » connecté à tous les sommets du graphe. Par exemple, pour le graphe précédent, on rajoute le sommet « 0 » (à droite) :



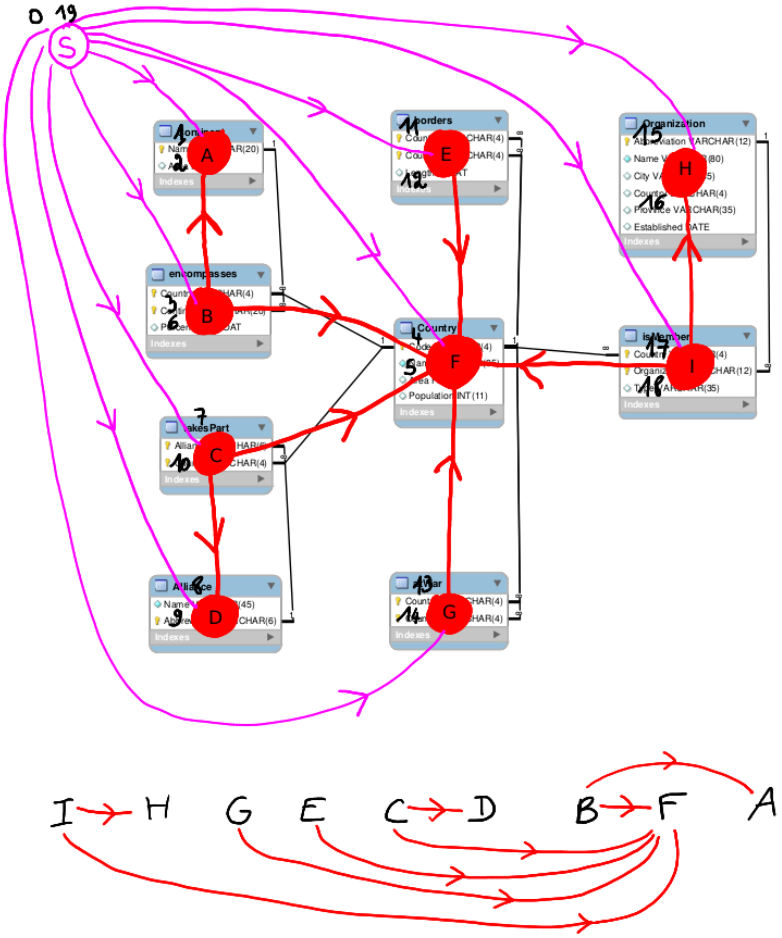
Puis on effectue un **parcours en profondeur** sur le nouveau graphe, au départ du sommet source. Un résultat possible est représenté ci-dessous. Lors du parcours en profondeur, on liste les sommets **dans l'ordre où l'algorithme finit de les traiter**. Dans cet exemple : A, D, C, B, E.



Alors, en prenant les sommets dans l'ordre inverse, on obtient un ordre topologique. Soit ici :

$$E < B < C < D < A.$$

Exemple



***Un* ordre Topologique possible**

(19) (Source)	(12) borders	(5) Country
(18) isMember	(10) takesPart	(2) Continent
(16) Organization	(9) Alliance	
(14) atWar	(6) encompasses	

Résumé

- On ajoute un état source ayant un arc vers tous les autres (si nécessaire)
- On fait un parcours du graphe en profondeur
- On note sur chaque sommet le temps de dernière visite

- Ce temps est la priorité du sommet dans l'ordre topologique construit
- Plus la priorité est élevé, plus la tâche correspondante doit être exécutée tôt
- L'ordre topologique est l'ordre décroissant des priorités obtenues.

Attention Il y a plusieurs parcours possibles en général et donc plusieurs ordres topologiques possibles.