Université Clermont Auvergne
BUT Info 1A
R207 Graphes
Année 2021-2022

Florent Foucaud
Malika More
Thibault Ralet
Carine Simon
Thierry Trévisan

TD3 - Parcours de graphes

Rappel de cours

- Un parcours de graphe induit un arbre couvrant, dont les arêtes sont celles explorées pendant le parcours.
- Nous avons vus deux types de parcours spécifiques : *en largeur* et *en profondeur.*
- Un parcours générique peut s'écrire de la façon suivante.

`Parcours du graphe` G `à partir du sommet "source"` s

- V `est la liste des sommets visités. Contient initialement seulement` s.
- F `est la frontière : les sommets visités mais qui ont peut-être encore des voisins non visités. Contient initialement seulement` s.
- `Répéter tant que la frontière` F `est non-vide :`
  - ⋆ `Considérer un sommet` x `de la frontière` F.
  - ⋆ `Si il existe un voisin` y `de` x `pas encore dans` V `:`
    - `- ajouter` y `dans` V `et dans` F
  - ⋆ `Sinon :`
    - `- enlever` x `de` F
- `Retourner` V

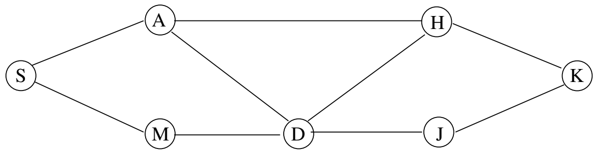
- Dans le parcours en largeur, la frontière F est une file. Pour considérer un sommet de la frontière on regarde toujours la tête de file. Pour enlever un sommet on défile, et pour en ajouter un, on enfile. Ainsi, l'algorithme inspecte tous les voisins d'un sommet avant de passer au suivant.
- Dans le parcours en profondeur, la frontière F est une pile. Pour considérer un sommet de la frontière on regarde toujours le haut de la pile. Pour enlever un sommet on dépile, et pour en ajouter un, on empile. Ainsi, l'algorithme va de sommet en sommet jusqu'à être bloqué et revenir sur ses pas.

La *distance* entre deux sommets d'un graphe est le plus petit nombre d'arêtes d'un chemin qui les relie.

Dans un arbre de parcours en largeur, toutes les distances du sommet source sont les mêmes que dans le graphe. On peut donc utiliser cet algorithme pour calculer les distances entre les sommets.

Preuve :
1) les distances dans le graphe ne peuvent pas être plus grandes que celles dans l'arbre (car un chemin de l'arbre est aussi un chemin du graphe).
2) Pour montrer que la distance dans l'arbre de la source à un sommet n'est pas plus grande que dans le graphe, on utilise une récurrence sur la distance à la source.

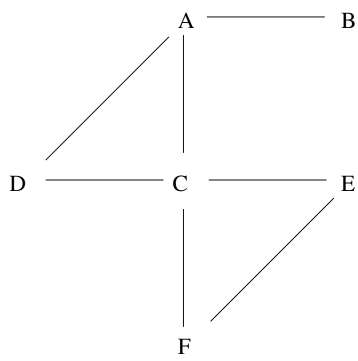
Exercice 1. On considère le graphe G ci-dessous.



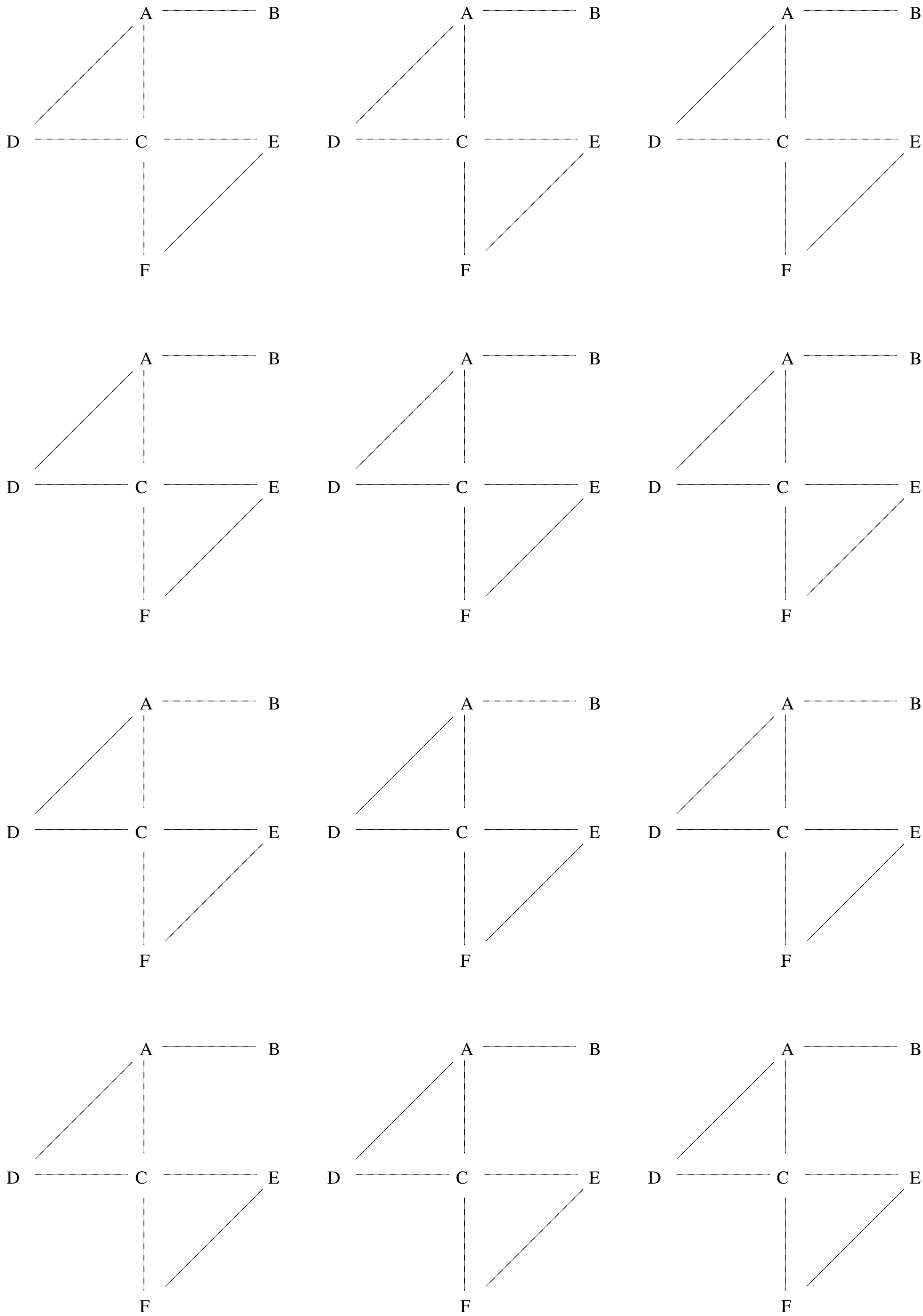
Dans tout cet exercice, on convient de toujours examiner les voisins d'un sommet dans l'ordre alphabétique. C'est juste une convention, pour que tout le monde ait la même réponse.

1. Effectuez un parcours en profondeur du graphe G à partir du sommet S. On demande de dessiner l'arbre de parcours obtenu.
2. Effectuez un parcours en largeur du graphe G à partir du sommet S. On demande de dessiner l'arbre de parcours obtenu. Que pouvez-vous déduire de votre parcours ? Indiquez-le sur votre dessin.

Exercice 2. On considère le graphe G ci-dessous :

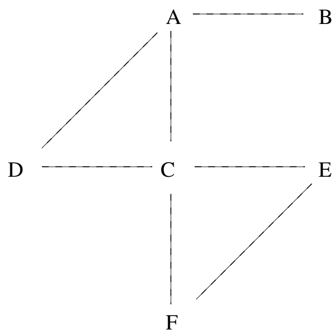


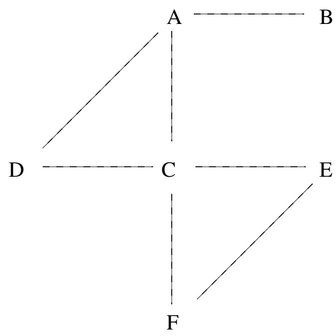
1. Effectuer un parcours en largeur à partir du sommet A. Par convention, on conviendra de toujours choisir le premier sommet dans l'ordre alphabétique en cas d'ambigüité. Vous rédigerez votre réponse en détaillant **toutes** les étapes sur le canevas ci-dessous. Vous indiquerez soigneusement l'évolution de la structure de données principale.

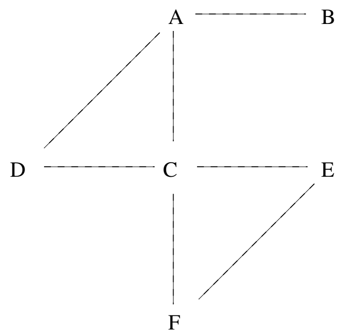


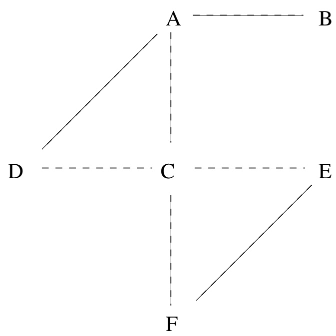
Évolution de la structure de données principale :

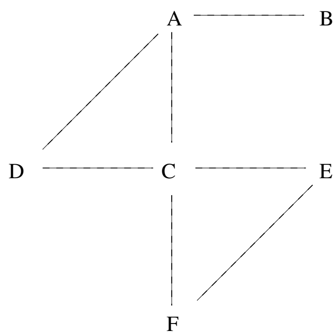
2. Effectuer un parcours en profondeur à partir du sommet A. Vous rédigerez votre réponse en détaillant **toutes** les étapes sur le canevas ci-dessous. Vous indiquerez soigneusement l'évolution de la structure de données principale.

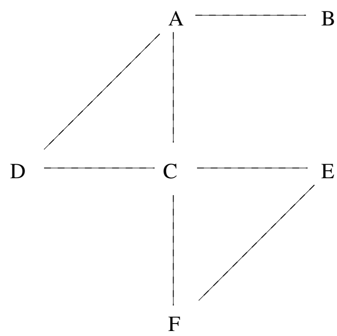


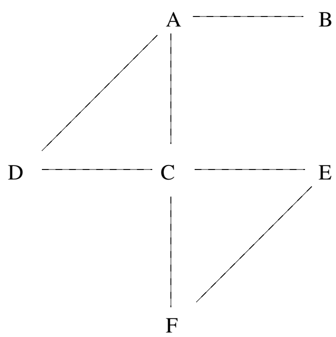


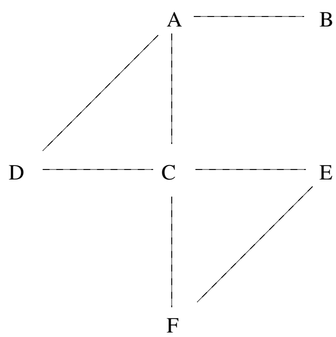


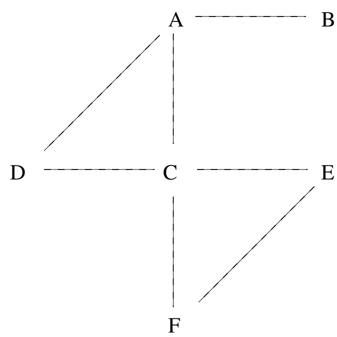








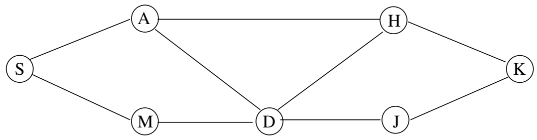




Évolution de la structure de données principale :

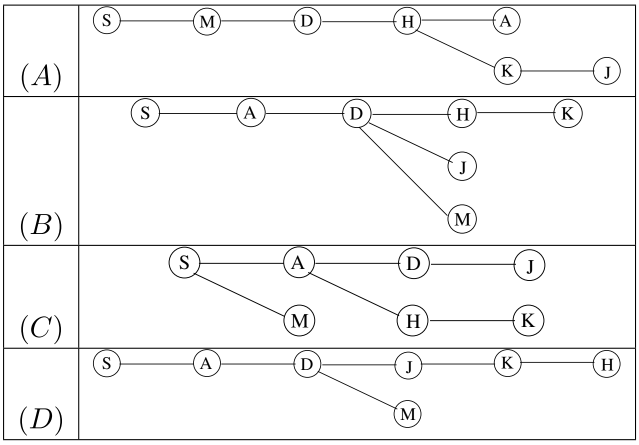
Exercice 3. Le parcours d'un graphe à partir d'un sommet donné permet (entre autre) de construire un *arbre de parcours*. La racine de cet arbre est le sommet de départ, et un sommet y est le fils d'un sommet x lorsque y est visité à partir de x pendant le parcours. Cette construction peut se faire quel que soit le parcours effectué : en largeur, en profondeur ou ni l'un ni l'autre.

On considère le graphe G ci-dessous



Quels sont le ou les arbre(s) correspondant à un parcours en profondeur, à un parcours en largeur ou à un parcours quelconque du graphe G à partir du sommet S ?

Remarque : Les arbres sont orientés de gauche à droite.

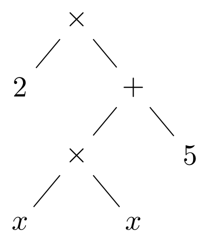


Exercice 4. Un robot a pour mission d'explorer un bâtiment d'importance archéologique. Ce bâtiment a été englouti par une coulée de boue. Au cours des âges, la boue a séché et forme des blocs compacts difficiles à percer. Le robot dispose de petites balises radio pour marquer chaque pièce visitée. À l'aide de ces dernières depuis une pièce où il se trouve, il peut détecter quels couloirs mènent à une pièce balisée, même si les couloirs sont obstrués.

1. Décrire la stratégie que le robot doit employer afin de visiter chaque pièce en déblayant le plus petit nombre de couloirs.
2. Combien de couloirs va-t-il devoir déblayer au minimum ?
3. En déblayant un minimum de couloirs et si on suppose que la longueur de chaque couloir est 1, quelle est la distance minimale que le robot doit couvrir afin d'explorer le bâtiment, puis revenir à son point de départ ? (on suppose que les pièces sont de longueur 0 pour simplifier)
4. Décrire la méthode pour que le robot fasse un tel parcours optimal.

Exercice 5 (Notation polonaise inversée)**.**

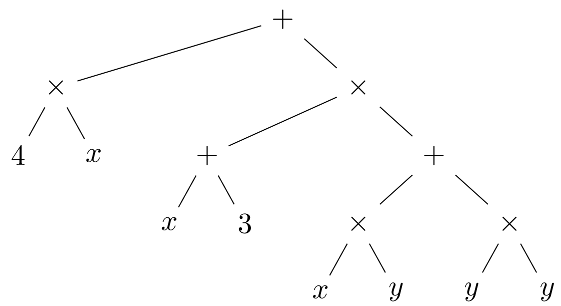
1. À toute formule mathématique, on associe un arbre enraciné qui traduit la construction récursive de la formule. Les feuilles représentent les nombres ou les variables et les nœuds intérieurs représentent les opérations. Par exemple l'arbre associé à la formule $2(x^2+5)$ est le suivant :



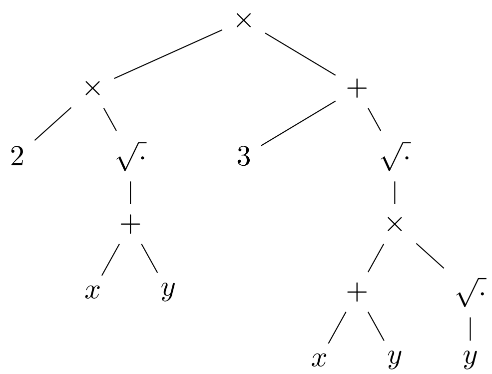
   (a) Construire l'arbre associé à la formule $(x+y)^2+(2x+1)(y+3)$

   (b) Construire l'arbre associé à la formule $\sqrt{(x+\sqrt{y})(3x+y)}$

   (c) Déterminer la formule associée à l'arbre :



   (d) Déterminer la formule associée à l'arbre :



2. La notation polonaise inversée permet de réécrire les formules mathématiques sans utiliser de parenthèses, et de façon à éliminer toute ambigüité, en utilisant les arbres associés aux formules. Cette notation s'obtient en effectuant un parcours en profondeur de l'arbre associé à la formule (et en parcourant toujours les fils d'un nœud de gauche à droite). On note alors les sommets dans l'ordre où on les rencontre pour la première fois. Par exemple, la formule $2(x^2+5)$ s'écrit en notation polonaise inversée $\times 2 + \times xx5$.

   (a) Déterminer la notation polonaise inversée de la formule $(x+y)^2+(2x+1)(y+3)$.

(b) Déterminer la notation polonaise inversée de la formule $\sqrt{(x+\sqrt{y})(3x+y)}$.

(c) Déterminer la formule associée à la notation polonaise inversée $\times + \times 3xy + 5 \times 2y$.

(d) Déterminer la formule associée à la notation polonaise inversée $\times \times + x\sqrt{\cdot}y + y\sqrt{\cdot}x\sqrt{\cdot} + \sqrt{\cdot}x\sqrt{\cdot}y$.

Exercice 6 (**)**.** On rappelle ci-dessous l'algorithme **Parcours en Profondeur**.

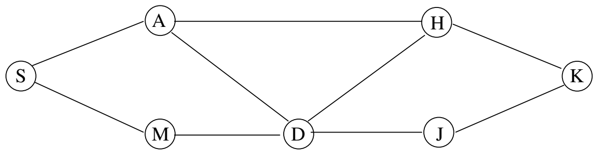
début
  Soit T un arbre qui a pour sommet uniquement X et aucune arête
  Soit P une pile qui contient uniquement le sommet X
  tant que *la pile P n'est pas vide* **faire**
    Soit Y le sommet en haut de la pile P
    si *il existe encore un sommet Z qui est voisin de Y dans G <u>mais qui n'est pas un sommet de T</u>* **alors**
      Ajouter le sommet Z en haut de la pile P
      Ajouter un nouveau sommet Z et une arête YZ à l'arbre T
    sinon
      Supprimer Y de la pile P
    fin
  fin
fin

On modifie maintenant cet algorithme de la façon suivante : au lieu de ne visiter chaque sommet qu'une seule fois, on se permet de le visiter éventuellement plusieurs fois, à condition toutefois de ne pas créer de cycle dans le parcours.

On remplace donc l'expression <u>*mais qui n'est pas un sommet de T*</u> par l'expression <u>*mais qui n'est pas un ancêtre de Y dans T*</u>, et on appelle **Parcours Modifié** l'algorithme résultant.

On admettra que l'objet T construit par le nouvel algorithme est bien un arbre, mais celui-ci peut contenir plusieurs sommets ayant le même nom.

On applique l'algorithme **Parcours Modifié** au graphe G ci-dessous à partir du sommet S.



1. On demande de dessiner l'arbre T obtenu.
2. Que représentent les branches de l'arbre T construit par l'algorithme **Parcours Modifié** pour le graphe G de départ ?

Exercice 7.

1. Pour quels graphes obtient-on un graphe induit par un parcours en largeur qui est lui-même ?
2. Même question pour un parcours en profondeur.

Exercice 8 (*)**.** *Définition :* La hauteur d'un arbre est la longueur de la chaîne la plus longue entre deux de ses sommets.

Montrez que parmi les arbres de parcours les plus hauts d'un graphe, il y en a toujours un qui est un arbre de parcours en profondeur.

Exercice 9 (***)**.** On considère un graphe connexe et un arbre de parcours en largeur. Montrez que toute arête du graphe est :

1. soit une arête de l'arbre,
2. soit si ce n'est pas le cas, une arête entre deux sommets dont les niveaux diffèrent d'au plus 1

Exercice 10 (***)**.** On considère un graphe connexe et un arbre de parcours en profondeur. Montrez que toute arête du graphe est :

1. soit une arête de l'arbre,
2. soit si ce n'est pas le cas, une arête entre deux sommets tels que l'un est l'ancêtre de l'autre (*arc arrière dans l'arbre orienté associé, enraciné dans la source*)