Université Clermont Auvergne
BUT Info 1A
R207 - Graphes
Année 2021-2022

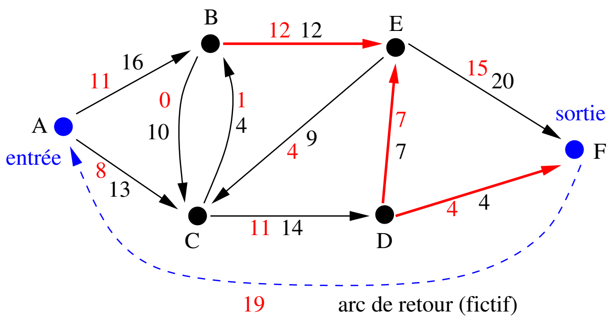
Florent Foucaud
Malika More
Thibault Ralet
Carine Simon
Thierry Trévisan

TD5 - Problèmes de flots

Les exercices commencent en page 5.

Rappel de cours

Flot à travers un réseau



- Flux à travers l'arc (C, D) : $\varphi(C, D) = 11$
- Valeur totale du flot $\varphi_0 = 19$ (à travers l'arc de retour)
- Arcs (B, E), (D, E) et (D, F) saturés (en rouge)
- Conservation des flux : loi des nœuds ou *de Kirchhoff* (1847 circuits éléctriques)

  « En chaque sommet, ce qui entre est égal à ce qui sort. »

  - En A : $19 = 11 + 8$
  - En B : $11 + 1 = 0 + 12$
  - En C : $8 + 0 + 4 = 1 + 11$, etc.
- Ce flot est **réalisable** : pour tout arc (u, v), on a bien $\varphi(u, v) \leq c(u, v)$

Le problème

- Donnée : un réseau
- Question : trouver un *flot réalisable maximal* (dont la valeur est maximale)

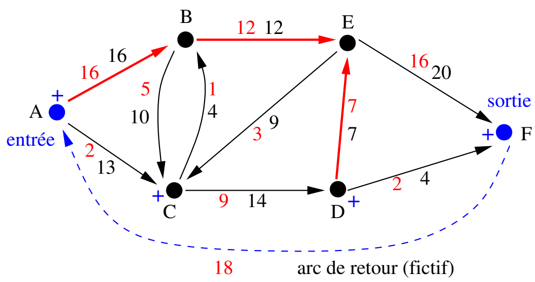
La solution Algorithme de Ford-Fulkerson (1956)

Idée générale

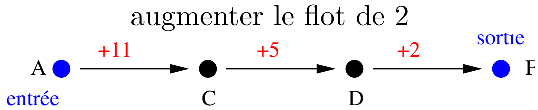
- Procéder par marquages successifs des sommets depuis l'entrée vers la sortie.
- On traite chaque sommet u marqué successivement.
- On essaye de marquer tous les voisins non marqués de u
  - les successeurs avec un $(+)$ *si l'arc n'est pas saturé*
  - puis les prédécesseurs avec un $(-)$ *si l'arc possède un flux non nul*
- Ceci permet de trouver des *chemins augmentants* de l'entrée vers la sortie, s'il en existe.

Chemins augmentants

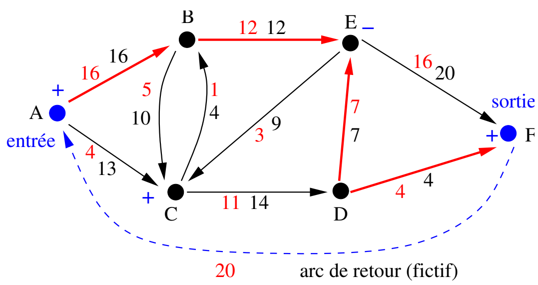
Le cas intuitif : on « ouvre des robinets ».



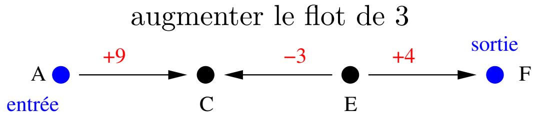
augmenter le flot de 2



Le cas moins intuitif : on « *ferme des robinets* et on en ouvre d'autres ».



augmenter le flot de 3



Condition d'arrêt

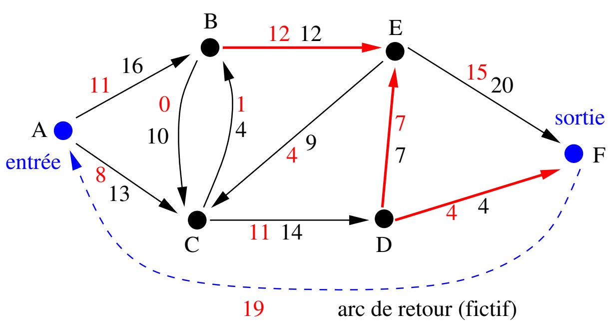
- On ne peut plus marquer la sortie : le flot obtenu est maximal
- Autre façon de prouver la maximalité du flot : on a trouvé une *coupe* saturée (voir plus loin)

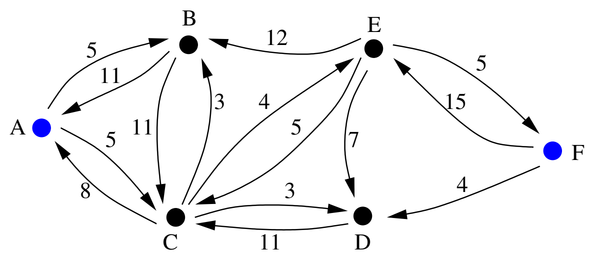
L'algorithme en pseudo-code

Données (G, c, s, t) *un réseau*
début
  initialisation *marquer + le sommet entrée* s
  tant que *le flot n'est pas maximal* **faire**
    tant que *on marque des sommets* **faire**
      pour chaque *sommet marqué* u *non encore traité* **faire**
        pour chaque *arc* (u, v) **faire**
          si v *n'est pas marqué et* (u, v) n'est pas saturé **alors**
            marquer v par $(+, u)$
          fin
        fin
        pour chaque *arc* (v, u) **faire**
          si v *n'est pas marqué et* (v, u) a un flot non nul **alors**
            marquer v par $(-, u)$
          fin
        fin
      fin
      si la sortie t n'est pas marquée **alors**
        le flot est maximal (on s'arrête)
      sinon
        augmenter le flot, démarquer les sommets (sauf l'entrée) et continuer
      fin
    fin
  fin
fin

Algorithme 1 : Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe d'écart



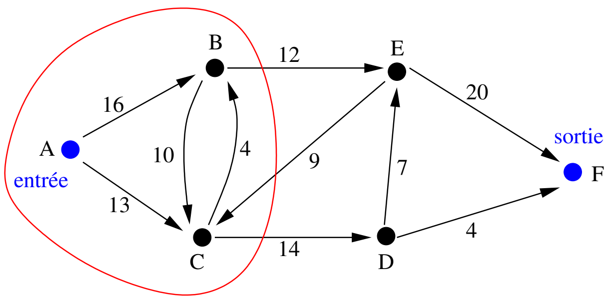


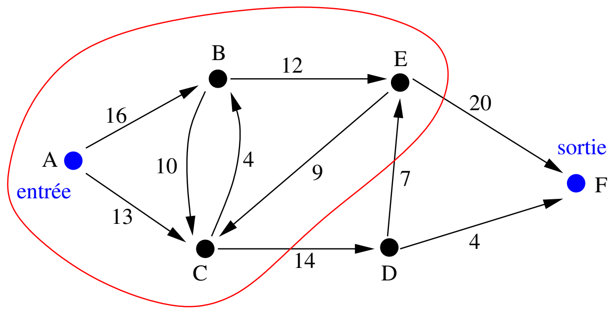
- Mêmes sommets
- Arcs dans les deux sens
- Capacités = écarts
- Supprimer les arcs de capacité nulle (saturation et flux nul)

Coupe Partition des sommets en deux groupes disjoints, l'un, noté $\mathcal{E}$, contenant l'entrée (A) et l'autre la sortie (F).

Capacité d'une coupe Somme des capacités des arcs *sortants* de $\mathcal{E}$

Arc sortant de $\mathcal{E}$ = allant d'un sommet de $\mathcal{E}$ vers un sommet extérieur à $\mathcal{E}$

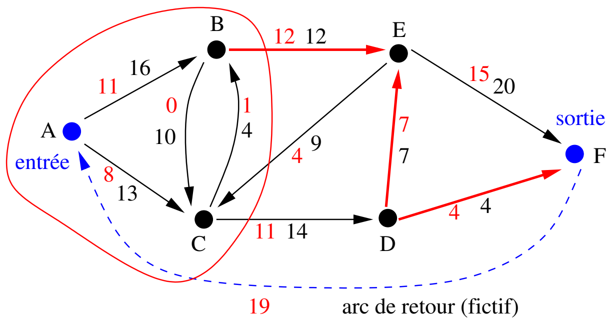




$= 12 + 14 = 26$

$= 14 + 20 = 34$

Flot net à travers une coupe Somme *algébrique* des flux sur les arcs entre $\mathcal{E}$ et l'extérieur



Capacité de la coupe = 26

Valeur du flot = 12-4+11 = 19

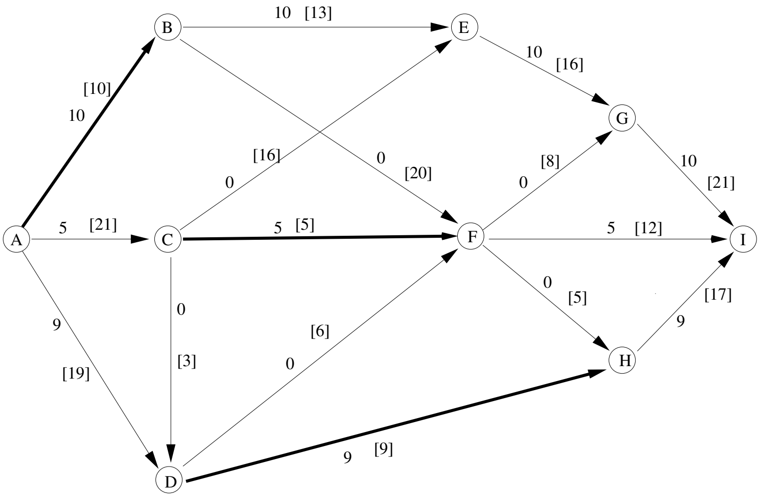
Corollaire important

- La valeur de *n'importe quel* flot réalisable est toujours inférieure ou égale à la capacité de *n'importe quelle* coupe.
- S'il y a égalité, c'est que le flot est maximal et la coupe est minimale.

Théorème de la coupe Les trois énoncés suivants sont équivalents :

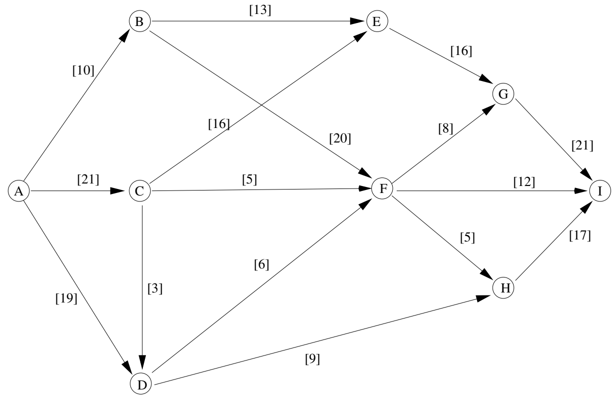
1. Le flot est maximal
2. Le graphe d'écart ne contient pas de chemin augmentant
3. La valeur du flot est égale à la capacité d'une coupe

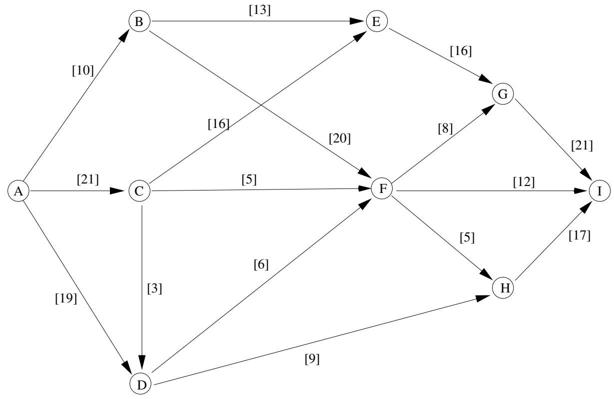
Exercice 1. Un réseau routier entre deux villes A et I est représenté schématiquement par le diagramme ci-dessous. La capacité de chaque arc est proportionnelle au nombre de véhicules qui peuvent s'écouler en une heure dans le tronçon correspondant. Le flux sur chaque arc est proportionnel au nombre de véhicules qui passent effectivement en une heure dans le tronçon correspondant, selon les mesures effectuées par les services de l'équipement.

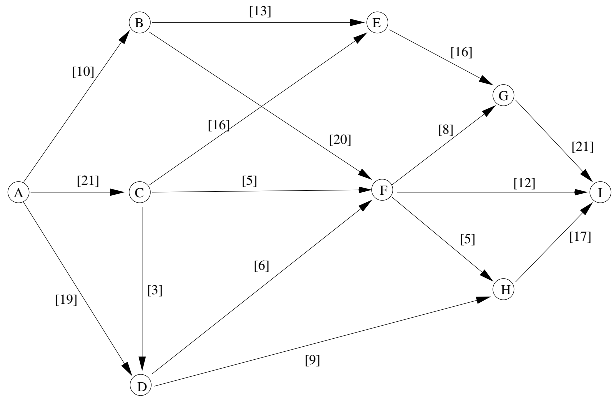


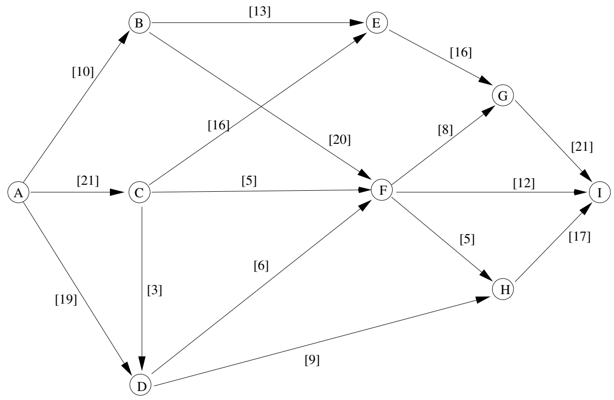
(Des copies du graphe sont disponibles en suivant.)

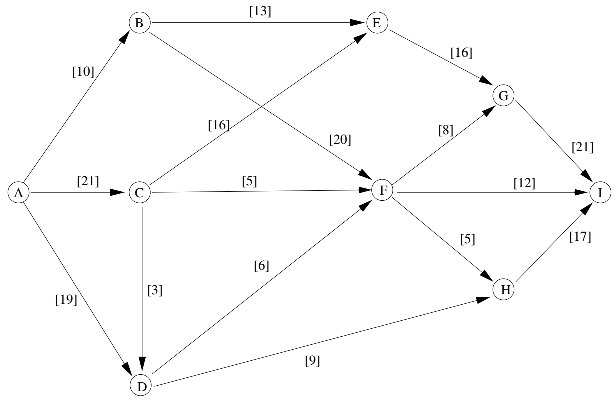
1. Quelle est actuellement la valeur du flot à travers le réseau ?
2. Calculer le graphe d'écart.
3. En utilisant l'algorithme de Ford-Fulkerson, déterminer le flot maximal qui pourrait s'écouler entre A et I, en cas d'augmentation du trafic (à partir de la situation actuelle).
4. Indiquer une coupe minimale. Quelle est la capacité de cette coupe ?
5. On estime que dans dix ans, le trafic entre les villes A et I aura doublé. Montrer que le réseau actuel sera alors insuffisant.
6. On désire faire des travaux pour améliorer la capacité globale du réseau.
   (a) On prévoit des travaux minimaux car on subit actuellement une cure d'austérité. Si la capacité de l'arc EG est portée à 20, s'ensuit-il une amélioration ?
   (b) Un changement politique permet finalement un investissement massif dans les infrastructures. Si la capacité de EG et HI sont portées à 20, celle de AB à 12, et celles de DF et FH à 10, après ces travaux, le nouveau réseau permettra-t-il d'absorber l'augmentation prévisible du trafic ?
   (c) Que devient le flot maximum dans le nouveau réseau ? (Continuez à faire tourner Ford-Fulkerson, puis trouvez une coupe minimale pour montrer que la solution trouvée est optimale.)

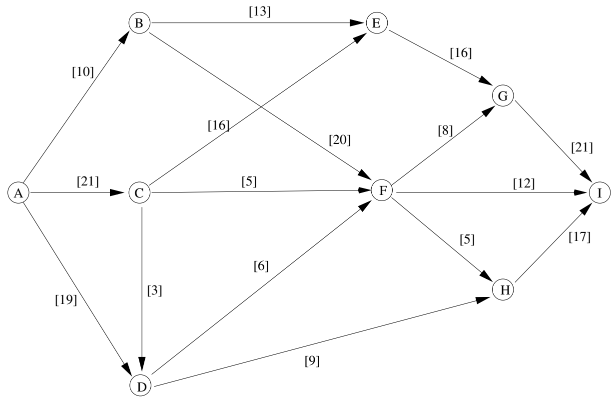

B
[13]
E
[10]
[16]
G
[16]
[20]
[8]
[21]
A
[21]
C
[5]
F
[12]
I
[5]
[17]
[19]
[3]
[6]
H
[9]
D

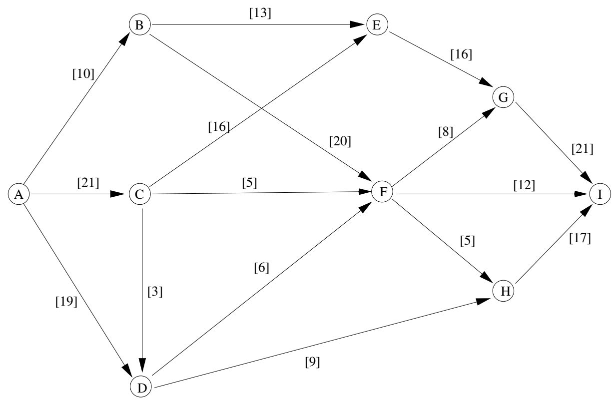

B
[13]
E
[10]
[16]
G
[16]
[20]
[8]
[21]
A
[21]
C
[5]
F
[12]
I
[5]
[17]
[19]
[3]
[6]
H
[9]
D

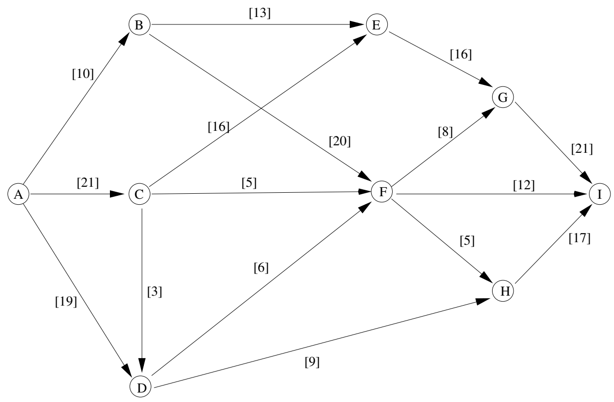

B
[13]
E
[10]
[16]
G
[16]
[20]
[8]
[21]
A
[21]
C
[5]
F
[12]
I
[5]
[17]
[19]
[3]
[6]
H
[9]
D


B
[13]
E
[10]
[16]
G
[16]
[20]
[8]
[21]
A
[21]
C
[5]
F
[12]
I
[5]
[17]
[19]
[3]
[6]
H
[9]
D


B
[13]
E
[10]
[16]
G
[16]
[20]
[8]
[21]
A
[21]
C
[5]
F
[12]
I
[5]
[17]
[19]
[3]
[6]
H
[9]
D

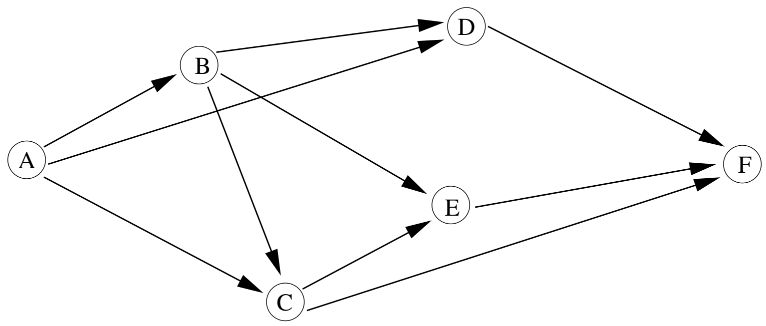

B
[13]
E
[10]
[16]
G
[16]
[20]
[8]
[21]
A
[21]
C
[5]
F
[12]
I
[5]
[17]
[19]
[3]
[6]
H
[9]
D


B
[13]
E
[10]
[16]
G
[16]
[20]
[8]
[21]
A
[21]
C
[5]
F
[12]
I
[5]
[17]
[19]
[3]
[6]
H
[9]
D


B
[13]
E
[10]
[16]
G
[16]
[20]
[8]
[21]
A
[21]
C
[5]
F
[12]
I
[5]
[17]
[19]
[3]
[6]
H
[9]
D

Exercice 2 (Chemins disjoints)**.**

Un graphe orienté est *fortement connexe* si, depuis chaque sommet, il existe au moins un chemin vers chaque autre sommet. Lorsqu'on est dans un réseau de communication (de type internet), on s'intéresse également au **nombre** de chemins pouvant relier deux sommets. Par exemple, le réseau ci-dessous représente un ensemble de routeurs :

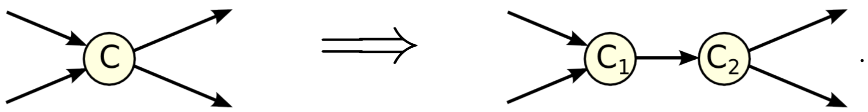


Le routeur A doit envoyer 6 paquets d'information au routeur F.

- S'il existe un seul chemin entre A et F, il faudra attendre la transmission de 6 paquets.
- S'il existe deux chemins *disjoints* entre A et F, on pourra envoyer trois paquets par chaque chemin, et donc prendre deux fois moins de temps.
- S'il existe trois chemins disjoints, ce sera encore plus rapide, etc.

Ici, la notion de « chemins disjoints » désigne des chemins de A à F n'ayant aucun routeur intermédiaire en commun. Le but est de répartir au mieux le transfert de paquets, sans surcharger aucun routeur en particulier. On aimerait donc un moyen général de connaître le **nombre de chemins disjoints** entre deux sommets d'un graphe orienté.

1. Dessinez un graphe G, copié du réseau ci-dessus, mais dans lequel chaque sommet (hormis A et F) est remplacé par deux sommets, reliés entre eux par un arc. Par exemple :



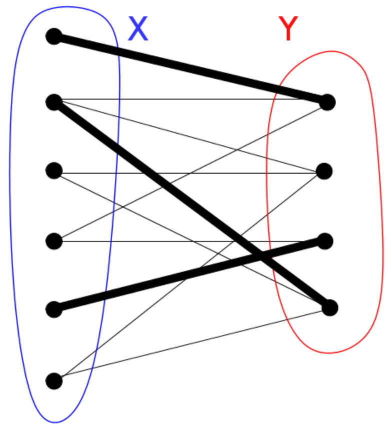
2. On donne une capacité de 1 à tous les arcs de G. Déterminez un flot maximal à travers ce réseau. Donnez une coupe minimale.
3. Répondez à la question initiale : combien y a-t-il de chemins disjoints entre A et F ?

Exercice 3 (Couplages)**.**

Les problèmes de couplage visent, comme leur nom l'indique, à former le maximum de couples entre deux ensembles. Cela arrive par exemple, lorsqu'on veut former des couples entre les futurs étudiants et les places dans les universités (sur Parcoursup par exemple).

Les algorithmes de flots permettent de résoudre certains de ces problèmes. Pour cela nous aurons besoin d'un peu de vocabulaire :

- Un graphe est dit **biparti** si ses sommets peuvent être partitionnés en deux ensembles X et Y tels que toute arête du graphe relie un sommet de X à un sommet de Y. (Il n'existe donc aucune arête entre 2 sommets de X, ni entre 2 sommets de Y).
- Un **couplage** d'un graphe est un sous-ensemble d'arêtes du graphe deux-à-deux indépendantes, c'est-à-dire n'ayant jamais de sommet en commun.
- Un couplage est dit **optimal** s'il contient le plus grand nombre d'arêtes possibles, parmi tous les couplages du graphe.



1. Les arêtes représentées en gras dans la figure du dessus constituent-elles un couplage ? Est-il optimal ?
2. On cherche à établir l'emploi du temps des lundi et mardi en BUT info à l'IUT de Montclerc Vergneau. Une journée à l'IUT se compose de quatre créneaux de 2 heures chacun : 8h-10h, 10h-12h, 13h-15h, 15h-17h. Voici les disponiblilités des sept enseignants :

   - Mme. Aziza : 10h-12h (lun), 13h-15h (mar).
   - Mme. Bernard : 13h-17h (lun).
   - M. Caramel : 8h-10h (lun), 13h-17h (mar).
   - Mme. Davidoff : 8h-15h (lun).
   - M. Emeric : 15h-17h (lun), 8h-10h (mar).
   - M. Fouillouze : 15h-17h (lun), 10h-15h (mar).
   - M. Grégorio : 13h-17h (mar).

   Tous les enseignants ont un cours à donner, sauf Mme. Davidoff qui doit donner **deux** cours. Montrez comment se ramener à un problème de couplage dans un graphe que vous dessinerez. Trouvez un couplage qui permette d'assurer au moins six cours parmi les huit voulus.
3. En fait, chercher un couplage optimal dans un graphe biparti revient à chercher un flot maximal, dans un réseau bien choisi. Dans le cas du graphe obtenu précédemment, quel est ce réseau, et quelle capacité devez-vous attribuer à chaque arête ?
4. En utilisant l'algorithme de Ford-Fulkerson, déterminez un couplage optimal pour le graphe obtenu précédemment.

Exercice 4 (Tomographie)**.**

La tomographie est une technique d'imagerie, très utilisée dans l'imagerie médicale qui permet de reconstruire le volume d'un objet à partir d'une série de mesures effectuées par tranche depuis l'extérieur de cet objet.

Plaçons nous dans un cas concret simple pour illustrer la tomographie, à savoir la reconstruction d'une image 2D composée de pixels noirs sur fond blanc à partir de mesures 1D. On connaît ainsi le nombre de pixels noirs de chaque ligne et de chaque colonne. On veut retrouver l'image 2D. Un exemple est donné figure 1 (à gauche les mesures seulement, à droite une image reconstruite qui correspond aux mesures).

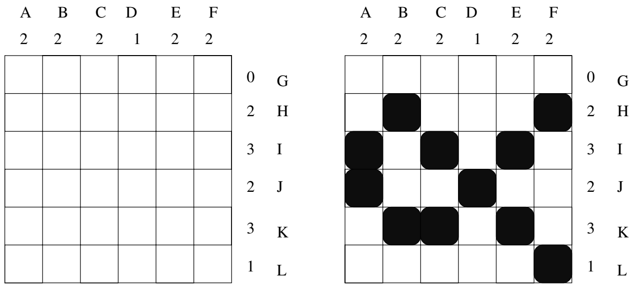


Figure 1 – Tomographie 2D

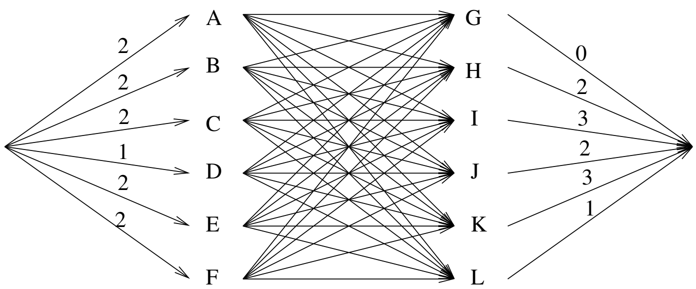
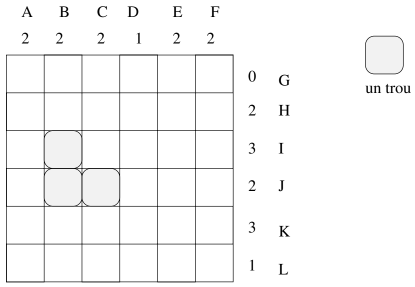


Figure 2 – Réseau

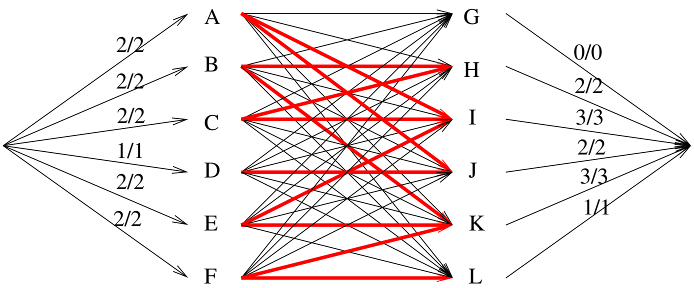
1. On ramène le problème de tomographie de la Figure 1 au calcul d'un flot maximum dans le réseau de la Figure 2 (les capacités de chaque arc sont notés sur la figure, sauf pour la partie centrale où tous les arcs sont présents de la gauche vers la droite et sont tous de capacité 1).
   (a) Expliquez pourquoi ce codage fonctionne bien.
   (b) Indiquez sur la Figure 2, le flot correspondant à l'image reconstruite de la figure 1
   (c) Montrez que ce flot est maximal (argumentez votre réponse).
   (d) Quelle autre bonne propriété ce flot a-t-il et qu'est-ce-que ça signifie pour le problème de tomographie ?
2. On dispose d'une information supplémentaire : on sait que certains pixels sont forcément blancs. On parle de trous. Ceux-ci sont indiqués directement sur la figure, comme ci-dessous.



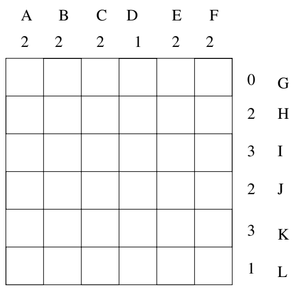
(a) Modifier le réseau de la question précédente pour tenir compte des trous. Dessinez ce nouveau réseau et expliquez votre démarche.

(b) Calculer un flot maximal dans ce nouveau réseau.

3. On considère le flot suivant.

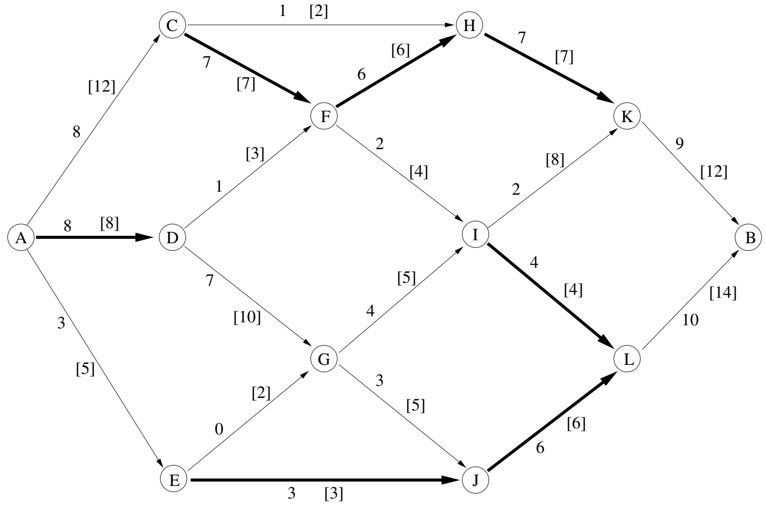


(a) Expliquez à quoi ce flot correspond pour le problème de tomographie.



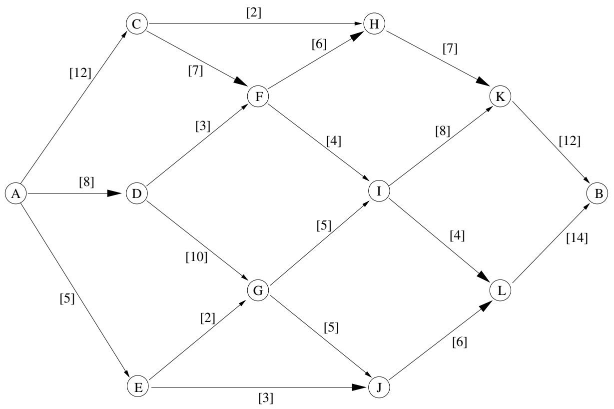
(b) Quel inconvénient de cette méthode de reconstruction d'image apparaît ?

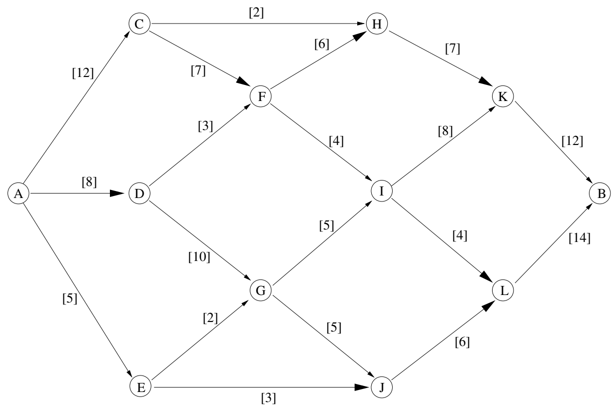
Exercice 5. On considère le réseau ci-dessous. Les capacités des arcs sont indiquées entre crochets.

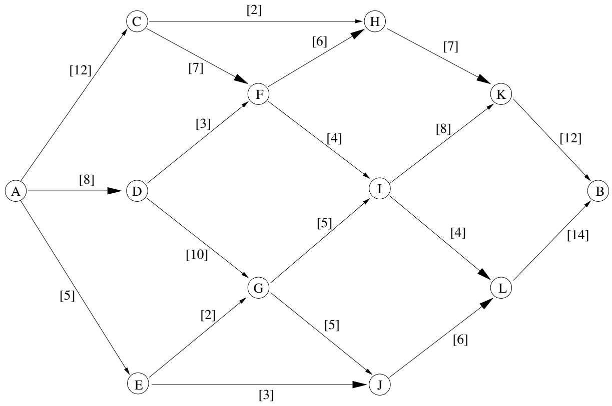


(Des copies du graphe sont disponibles en suivant.)

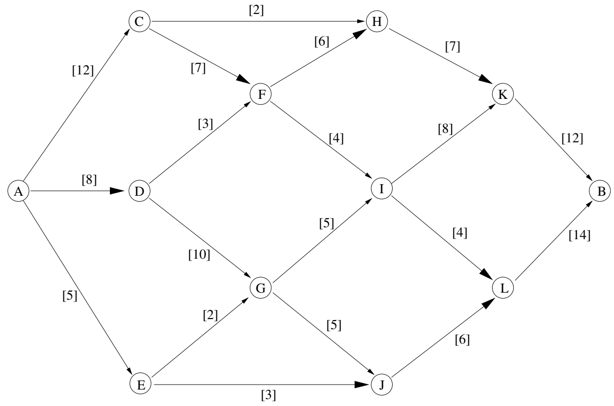
1. Donner la valeur du flot actuel.
2. Déterminer le graphe d'écart.
3. Trouver la valeur du flot maximal en utilisant l'algorithme de Ford-Fulkerson.
4. Indiquer par un trait rouge et un trait vert sur le graphe deux coupes minimales.
5. On augmente deux valeurs de capacité : l'arc CH passe de 2 à 5 et l'arc JL passe de 6 à 8. Quelle est après ces modifications la nouvelle valeur du flot maximal ?



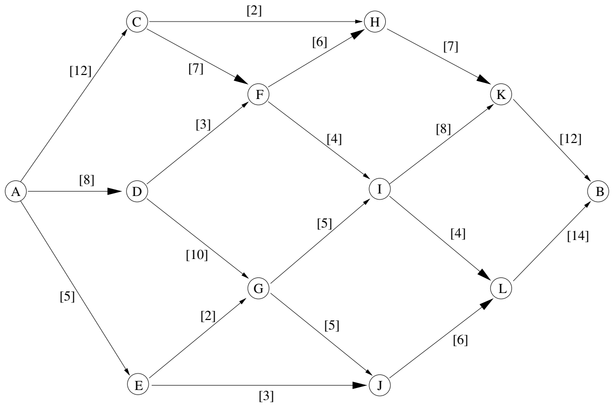




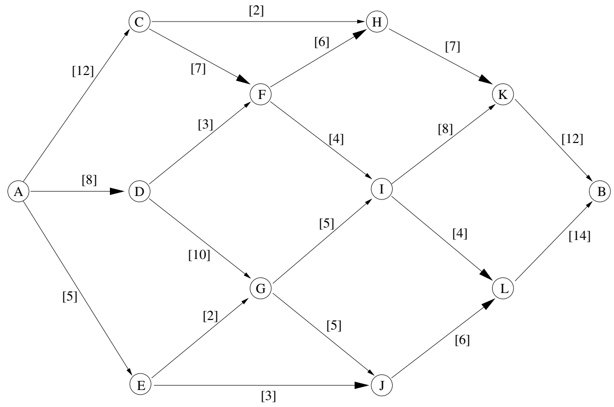
[2]
C
H
[12]
[7]
[6]
[7]
F
K
[3]
[4]
[8]
[12]
A
[8]
D
I
B
[5]
[10]
[4]
[14]
G
L
[5]
[2]
[5]
[6]
E
J
[3]



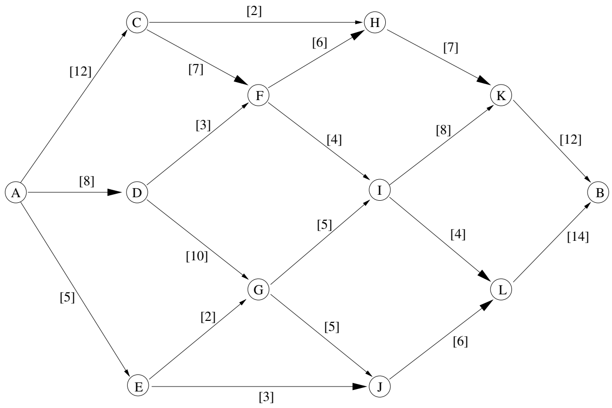
[2]
C
H
[12]
[7]
[6]
[7]
F
K
[3]
[4]
[8]
[12]
A
[8]
D
I
B
[5]
[10]
[4]
[14]
G
L
[5]
[2]
[5]
[6]
E
J
[3]



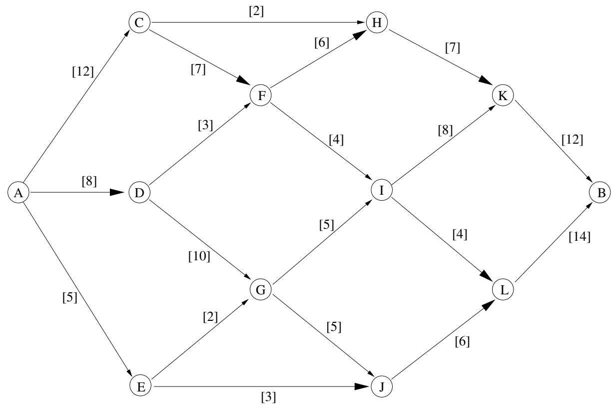
[2]
C
H
[12]
[7]
[6]
[7]
F
K
[3]
[4]
[8]
[12]
A
[8]
D
I
B
[5]
[10]
[4]
[14]
G
L
[5]
[2]
[5]
[6]
E
J
[3]



[2]
C
H
[12]
[7]
[6]
[7]
F
K
[3]
[4]
[8]
[12]
A
[8]
D
I
B
[5]
[10]
[4]
[14]
G
L
[5]
[2]
[5]
[6]
E
J
[3]

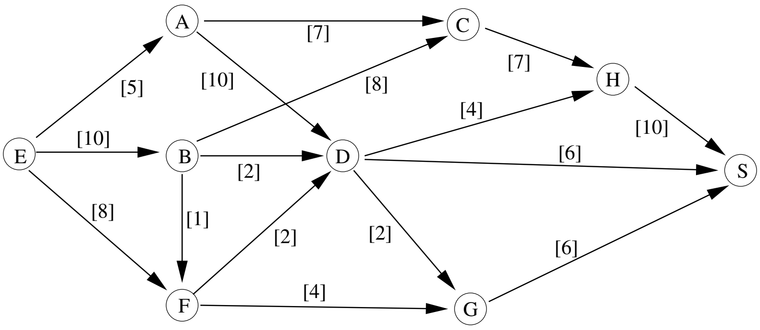


[2]
C
H
[12]
[7]
[6]
[7]
F
K
[3]
[4]
[8]
[12]
A
[8]
D
I
B
[5]
[10]
[4]
[14]
G
L
[5]
[2]
[5]
[6]
E
J
[3]



[2]
C
H
[12]
[7]
[6]
[7]
F
K
[3]
[4]
[8]
[12]
A
[8]
D
I
B
[5]
[10]
[4]
[14]
G
L
[5]
[2]
[5]
[6]
E
J
[3]

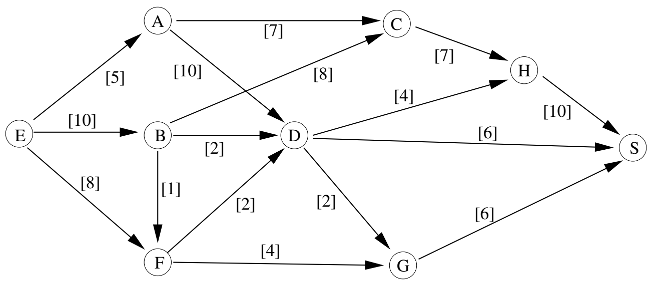
Exercice 6. Avant d'établir un projet de construction d'autoroute, on désire étudier la capacité du réseau routier, représenté par le graphe ci-dessous, reliant la ville E à la ville S. Pour cela, on a evalué le nombre maximal de véhicules que chaque route peut écouler par heure, compte tenu de la largeur des routes, des arrêts aux feux, etc.. Ces évaluations sont indiquées en centaines de véhicules par heure sur les arcs du graphe. Les temps de parcours entre villes sont tels que les automobilistes n'empruteront que les chemins représentés par le graphe.

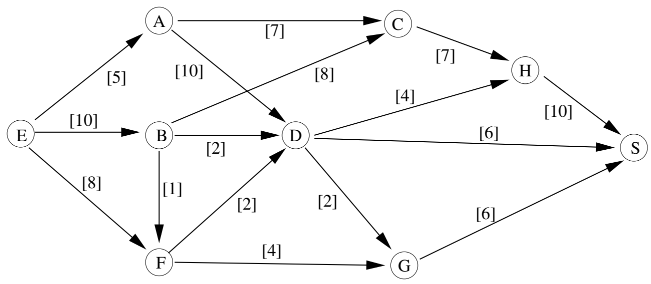


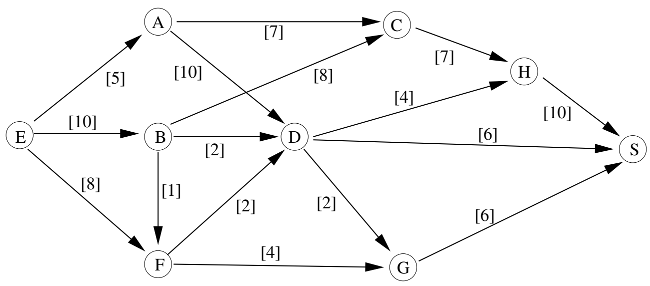
(Des copies du graphe sont disponibles en suivant.)

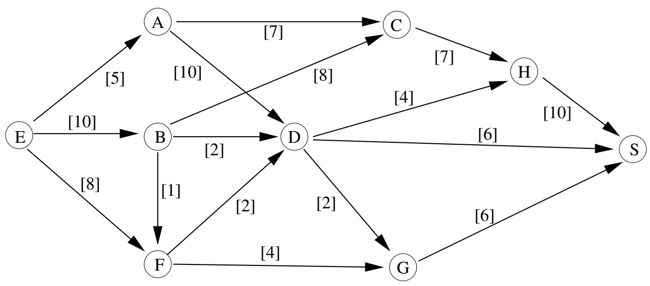
1. Quel est le débit horaire total maximal de véhicules susceptibles de s'écouler entre les villes E et S ?
2. La connaissance du réseau routier peut-être complétée par l'évaluation du nombre maximal de véhicules pouvant traverser chacune des villes A, B, C, D, F, G, H par heure. En effet, un automobiliste empruntant les (A, D) et (D, G) doit nécessairement traverser la ville D. Le débit horaire du réseau urbain de cette ville intervient donc dans l'étude du nombre de voitures circulant au maximum dans le réseau routier. Les évaluations des débits horaires maximaux étant données (en centaines de véhicules par heure) dans le tableau ci-dessous, déterminer le débit horaire maximal du réseau ainsi complété.

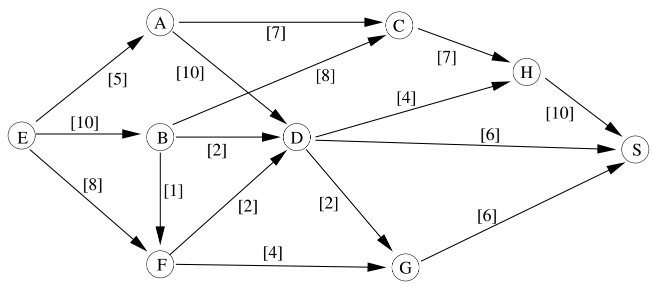
A	B	C	D	F	G	H
6	7	8	6	6	5	9

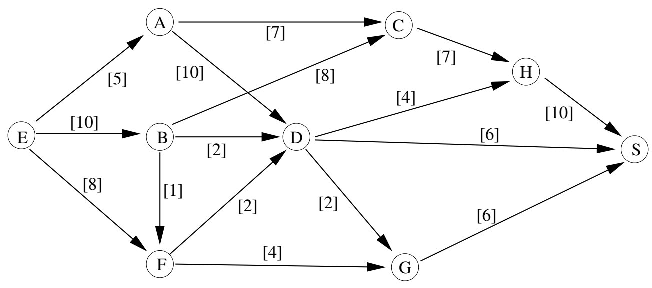


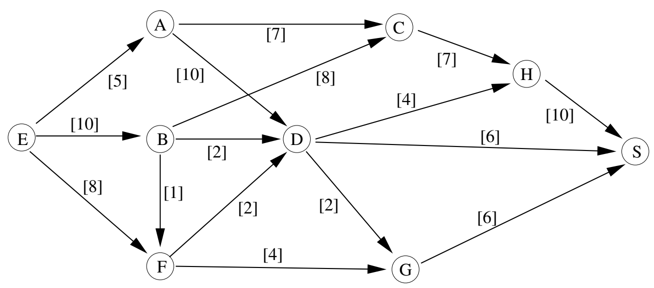


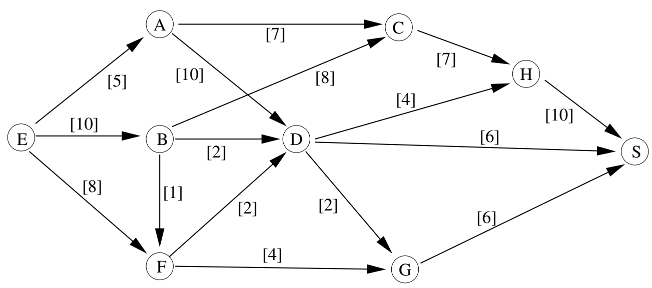


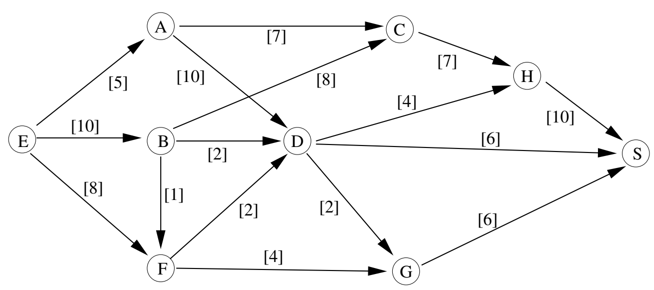


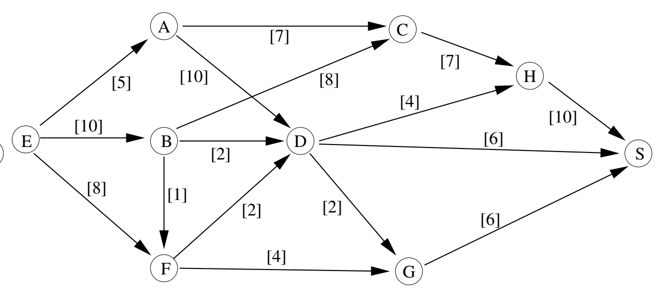

A
[7]
C
[10]
[5]
[7]
H
[8]
[4]
[10]
E
[10]
B
[2]
D
[6]
S
[8]
[1]
[2]
[2]
[6]
F
[4]
G


A
[7]
C
[10]
[5]
[7]
H
[8]
[4]
[10]
E
[10]
B
[2]
D
[6]
S
[8]
[1]
[2]
[2]
[6]
F
[4]
G


A
[7]
C
[10]
[5]
[7]
H
[8]
[4]
[10]
E
[10]
B
[2]
D
[6]
S
[8]
[1]
[2]
[2]
[6]
F
[4]
G


A
[7]
C
[10]
[5]
[7]
H
[8]
[4]
[10]
E
[10]
B
[2]
D
[6]
S
[8]
[1]
[2]
[2]
[6]
F
[4]
G


A
[7]
C
[10]
[5]
[7]
H
[8]
[4]
[10]
E
[10]
B
[2]
D
[6]
S
[8]
[1]
[2]
[2]
[6]
F
[4]
G


A
[7]
C
[10]
[5]
[7]
H
[8]
[4]
[10]
E
[10]
B
[2]
D
[6]
S
[8]
[1]
[2]
[2]
[6]
F
[4]
G