Université Clermont Auvergne
BUT Info 1A
R207 - Graphes
Année 2021-2022

Florent Foucaud
Malika More
Thibault Ralet
Carine Simon
Thierry Trévisan

TD6 – Colorations, graphes planaires

Rappel de cours

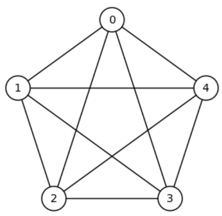
Colorations

Définition Une *coloration* d'un graphe G non-orienté est une fonction qui attribue à chaque sommet de G une valeur (appelée couleur) de telle façon que deux sommets adjacents (reliés par une arête) reçoivent deux couleurs différentes.
Le *nombre chromatique* d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le plus petit nombre de couleurs possible dans une coloration de G.

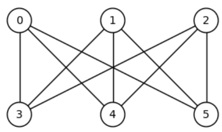
Graphes planaires

Un graphe est planaire si on peut le dessiner sans croisement d'arêtes.

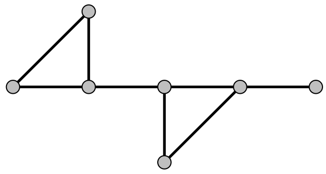
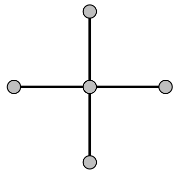
Théorème (Kuratowski, 1930) : Un graphe n'est pas planaire si et seulement le graphe K_5 ou le graphe $K_{3,3}$ en est un mineur.



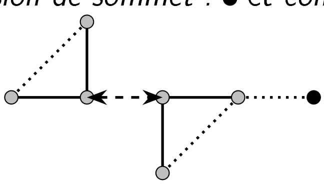
K_5



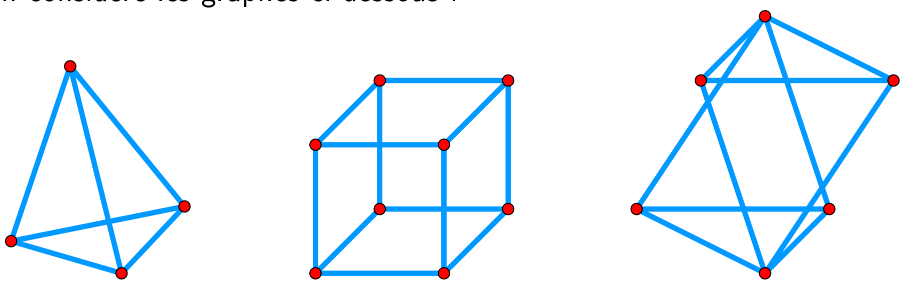
$K_{3,3}$

Exemple : Voici un graphe G  et un mineur de G : 

obtenu après :
suppression d'arêtes : ...., *suppression de sommet :* ● et *contraction d'arêtes :* ◄- - -► :



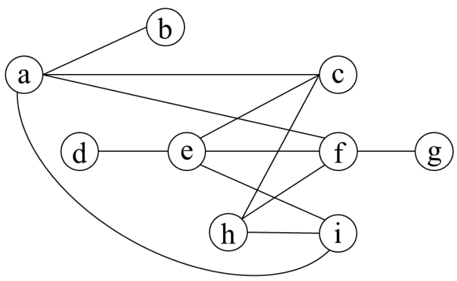
Exercice 1. On considère les graphes ci-dessous :



1. Déterminer leur nombre chromatique χ.
2. Démontrer qu'ils sont planaires.

Exercice 2.

1. Le graphe suivant est-il planaire ? Justifier **rigoureusement** votre réponse.



2. On considère un graphe G défini par la matrice d'adjacence M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le graphe G est-il planaire ? *Justifier.*

Exercice 3.

1. Déterminer le nombre chromatique des graphes complets K_n.
2. Déterminer le nombre chromatique des cycles C_n.
3. Montrer qu'un graphe est 2-coloriable si et seulement si il est biparti (c'est-à-dire qu'on peut partitionner les sommets en deux paquets X et Y de telle façon que toutes les arêtes sont entre X et Y).
4. Donner un algorithme pour décider si un graphe est biparti.

Exercice 4.
On veut organiser un examen dans une école d'ingénieurs. Il y a six options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Internet (I) et Sport (S).
Les profils des candidats à options multiples sont : FAM, DS, IS, IM.

1. Quel est le nombre maximal d'épreuves à mettre en parallèle ?
2. Une épreuve occupe une demi-journée. Quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

Exercice 5. Un jardinier doit décorer un jardin privatif en répartissant 10 variétés de fleurs notées V_1 à V_{10} dans différents parterres. Certaines de ces variétés ne peuvent pas être plantées ensemble pour des raisons diverses (tailles, couleurs, conditions climatiques, etc.) et ces incompatibilités sont résumées dans le tableau ci-dessous (une croix indique qu'il y a incompatibilité entre deux variétés).

Fleurs	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
V_1			$\times$			$\times$				$\times$
V_2			$\times$	$\times$	$\times$			$\times$		
V_3	$\times$	$\times$		$\times$		$\times$				
V_4		$\times$	$\times$		$\times$			$\times$	$\times$	
V_5		$\times$		$\times$			$\times$	$\times$		
V_6	$\times$		$\times$				$\times$			
V_7					$\times$	$\times$				
V_8		$\times$		$\times$	$\times$					
V_9				$\times$						$\times$
V_{10}	$\times$								$\times$	

1. Représenter par son graphe G la situation.
2. **a.** Trouver un sous-graphe complet d'ordre 4 et le dessiner.
   b. Que peut-on en déduire pour la coloration du graphe G ? Quel est le nombre minimum de parterres que le jardinier doit décorer ?
3. **a.** Classer les sommets de G par ordre de degré décroissant.
   b. En déduire un encadrement de C, nombre chromatique de G.
4. **a.** Procéder à la coloration du graphe G.
   b. Que peut-on en déduire pour le nombre C ? Justifier avec soin.
   c. Proposer un ensemble de parterres avec une répartition adaptée des variétés de fleurs.

Exercice 6.

Le principal d'un collège veut organiser les conseils de classe de Sixième de manière à ce que chaque professeur concerné (sauf le professeur d'arts plastiques et celui de musique, qui enseignent dans toutes les classes) puisse y assister.

De plus, pour mobiliser le moins de temps possible, il décide de mettre le plus grand nombre de conseils en parallèle.

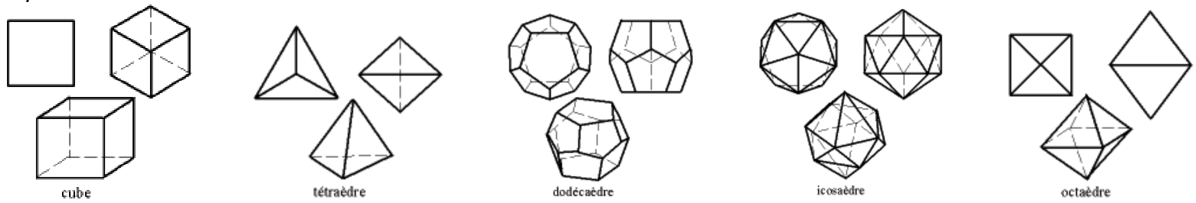
Connaissant la grille ci-dessous comportant les noms des professeurs de chaque classe, quelle répartition peut-il choisir ?

	6^{e}A	6^{e}B	6^{e}C	6^{e}D	6^{e}E	6^{e}F	6^{e}G	6^{e}H
Français	Mme Laitre	M. Oulipo	Mme Claive	M. Ugo	Mme Claive	M. Oulipo	Mme Saunay	M. Ugo
Maths	M. Hix	M. Graff	M. Hix	Mme Py	Mme Logues	M. Hautcarré	Mme Hélainin	Mme Py
Hist./Géo.	Mme Adret	M. Syrius	M. Hubac	M. Hubac	Mme Colomb	M. Syrius	Mme Adret	Mme Adret
Anglais		M. Naud		Mme Taiques	Mme Taques	M. Naud	Mme Baudy	Mme Baudy
Allemand	Mme Draille		Mme Draille					
S.V.T.	Mme Mendel	M. Bernard	Mme Despuys	M. Bernard	Mme Despuys	M. Bernard	Mme Mendel	Mme Mendel
Techno.	Mme Matik	Mme Matik	M. Otaud	Mme Matik	M. Hinfaud	M. Otaud	M. Hinfaud	M. Hinfaud
E.P.S.	M. Poix	M. Poix	Mme Javelaud	Mme Javelaud	Mme Javelaud	M. Brace	M. Brace	M. Brace

Exercice 7.

On se proposer de démontrer à l'aide des graphes un théorème dû à Euler : si dans un polyèdre convexe, S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces, alors $S - A + F = 2$.

Les cinq solides de Platon :

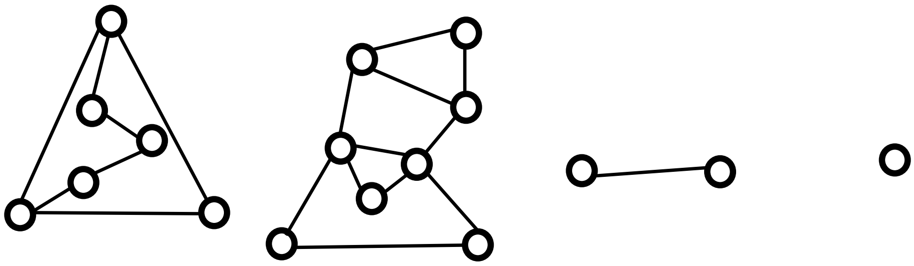


1. Supprimons une face du polyèdre : vérifier qu'on ne change ni S, ni A.

Il suffit donc de démontrer que dans ce polyèdre où il manque une face, $S - A + F = 1$.
Pour cela, étirons-le pour l'aplatir sur un plan. On obtient une représentation du polyèdre par un graphe.

2. Supposons qu'une face au moins ne soit pas un triangle.
   Démontrer que si on trace une diagonale dans cette face, le nombre $S - A + F$ ne change pas.
   En déduire qu'on peut se ramener au cas où toutes les faces sont des triangles.
3. Démontrer que si on enlève une arête extérieure, on ne change pas $S - A + F$.
4. Démontrer que si on enlève une arête ne limitant plus un triangle, on ne change pas $S - A + F$.
5. En répétant ce processus, on aboutit à un triangle.
   Vérifier qu'alors $S - A + F = 1$. Conclure.

remarque : La relation reste vraie pour n'importe quel graphe planaire connexe représenté sans croisement. Relation entre le nombre A de ses arêtes, le nombre S de ses sommets et le nombre R des régions qu'il détermine. Vous pouvez la vérifier avec les quatre graphes ci-dessous :



Exercice 8.

Règle de construction d'un graphe de Mycielski $M(G)$ à partir d'un graphe G :

- G a n sommets $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
- On ajoute à G $n+1$ sommets notés $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ainsi que w, tels que : u_i est relié aux voisins de v_i et à w.

1. On pose $G = P_2$. Construire $M(G)$.
2. On pose $G = C_5$. Construire $M(G)$. Le graphe obtenu est-il planaire ?
3. Montrer, dans le cas général, que si G n'a pas de triangle, $M(G)$ non plus.
4. On note $\chi(\mathcal{G})$ le nombre chromatique d'un graphe $\mathcal{G}$.
   Soit G un graphe, montrer que $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$.

Exercice 9.

On considère une grille de sudoku simplifiée (seuls les nombres de 1 à 4 interviennent) :

3			
	1	3	
	4	2	
			4

Expliquer comment on peut se servir de la coloration pour résoudre cette grille ou en fabriquer une quelconque (on pourra s'aider du schéma ci-dessous).