Méthodes d'optimisation

BUT Info 2e année

Florent Foucaud
Dipayan Chakraborty, Malika More, Adrien Wohrer

IUT CLERMONT AUVERGNE
Aurillac - Clermont-Ferrand - Le Puy-en-Velay
Montluçon - Moulins - Vichy

2022-2023

Organisation du cours

Organisation

Planning :

- 5 CM (5h30)
- 2 feuilles de TD (4h)
- 3 feuilles de TP (10h)

Évaluation :

- DS 1, sur table (50%) portant sur les 3 premières semaines (17 novembre)
- DS 2, sur table (50%) portant sur l'ensemble du cours (15 décembre)

Optimisation et recherche opérationnelle

L’optimisation, c’est quoi ?

Recherche opérationnelle : discipline aux contours vagues, entre théorie et pratique, à l’interface de :

mathématiques, informatique, logistique, économie

La Recherche Opérationnelle (RO) peut se définir comme la mise en œuvre de méthodes scientifiques, essentiellement mathématiques et algorithmiques, en vue de prendre la meilleure décision possible.

Elle fournit des outils pour rationaliser, simuler et optimiser l’architecture et le fonctionnement des systèmes industriels et économiques. Elle propose des modèles pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire des choix efficaces et robustes.

La RO est une discipline exploitant ce qu’il y a de plus opérationnel dans les mathématiques, l’économie et l’informatique. Elle est en prise directe avec l’industrie et joue un rôle-clé dans le maintien de la compétitivité.

Source : “Le livre blanc de la Recherche Opérationnelle en France”
ROADEF, 2011 et 2019

La RO : buts et méthodes

La RO vise à :

- modéliser
- optimiser
- planifier

les systèmes industriels et économiques.

La RO : buts et méthodes

La RO vise à :

- modéliser
- optimiser
- planifier

les systèmes industriels et économiques.

La RO permet de trouver des solutions à des problèmes complexes, pour lesquels une recherche exhaustive parmi les solutions n'est pas possible.

La RO : buts et méthodes

La RO vise à :

- modéliser
- optimiser
- planifier

les systèmes industriels et économiques.

La RO permet de trouver des solutions à des problèmes complexes, pour lesquels une recherche exhaustive parmi les solutions n'est pas possible.

Pour cela elle dispose d'une boîte à outils :

- modélisation par les mathématiques discrètes :
  - théorie des graphes
  - contraintes
- résolution par :
  - la programmation mathématique → programmation linéaire, ...
  - algorithmes de recherche de solution :

    → algorithmes spécifiques, méta-heuristiques, intelligence artificielle...

Historique

- Avant le XXe siècle : balbutiements de la modélisation mathématique de problèmes concrets

Historique

- Avant le XXe siècle : balbutiements de la modélisation mathématique de problèmes concrets
- 1937 : Optimisation du système de radars britannique

(Albert P. Rowe et Robert Watson-Watt)

A. P. Rowe

(1898-1976)

R. Watson-Watt

(1892-1973)

Historique

- Avant le XXe siècle : balbutiements de la modélisation mathématique de problèmes concrets
- 1937 : Optimisation du système de radars britannique

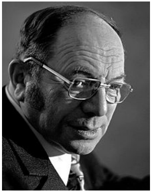
  (Albert P. Rowe et Robert Watson-Watt)
- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)

A. P. Rowe

(1898-1976)

R. Watson-Watt

(1892-1973)



L. V. Kantorovich

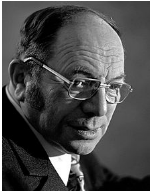
(1912-1986)

Historique

- Avant le XXe siècle : balbutiements de la modélisation mathématique de problèmes concrets
- 1937 : Optimisation du système de radars britannique
  (Albert P. Rowe et Robert Watson-Watt)
- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l'armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)


A. P. Rowe
(1898-1976)


R. Watson-Watt
(1892-1973)


L. V. Kantorovich
(1912-1986)


G. B. Dantzig
(1914-2005)

Historique

- Avant le XXe siècle : balbutiements de la modélisation mathématique de problèmes concrets
- 1937 : Optimisation du système de radars britannique

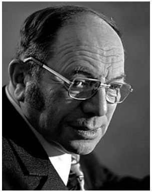
  (Albert P. Rowe et Robert Watson-Watt)
- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l'armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)
- 1948-49 : Ravitaillement lors du blocus de Berlin-ouest


A. P. Rowe

(1898-1976)


R. Watson-Watt

(1892-1973)


L. V. Kantorovich

(1912-1986)


G. B. Dantzig

(1914-2005)

Historique

- Avant le XXe siècle : balbutiements de la modélisation mathématique de problèmes concrets
- 1937 : Optimisation du système de radars britannique

(Albert P. Rowe et Robert Watson-Watt)

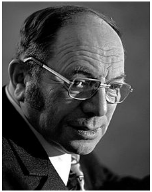
- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l'armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)
- 1948-49 : Ravitaillement lors du blocus de Berlin-ouest
- Ensuite : utilisation de la RO dans l'industrie, logistique, économie, etc.

A. P. Rowe

(1898-1976)

R. Watson-Watt

(1892-1973)



L. V. Kantorovich

(1912-1986)

G. B. Dantzig

(1914-2005)

Project CyberSyn (Chili, 1970-1973)

Système d'aide à la décision pour la planification économique, avec un réseau "cybernet" reliant les usines au centre de décisions.

Stafford Beer (1926-2002)

La RO, une communauté de R & D

En France : la ROADEF (Société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision) `https://www.roadef.org`

- Acteurs académiques : laboratoires de recherche
- Acteurs industriels : départements de R & D

La RO, une communauté de R & D

En France : la ROADEF (Société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision) `https://www.roadef.org`

- Acteurs académiques : laboratoires de recherche
- Acteurs industriels : départements de R & D

Interactions avec d'autres communautés de R & D :

- Algorithmique et complexité
- Théorie des graphes et combinatoire
- Intelligence artificielle
- ...

Concrètement, quels types de problèmes pour la RO ?

- Optimisation dans la production, la vente
  → minimisation des coûts, maximisation des gains
- Ordonnancement (planification de tâches)
- Réseaux de transport, d'énergie, de télécommunications
- Problèmes de placement (empilements, découpage de pièces)
- ...

Concrètement, quels types de problèmes pour la RO ?

- Optimisation dans la production, la vente
  → minimisation des coûts, maximisation des gains
- Ordonnancement (planification de tâches)
- Réseaux de transport, d'énergie, de télécommunications
- Problèmes de placement (empilements, découpage de pièces)
- ...

Challenge ROADEF/EURO, proposé par une grande entreprise :

- 2022 : Problème du chargement de camions (Renault)
- 2020 : Planification de la maintenance des réseaux électriques (RTE)
- 2016 : Routage d'Inventaire pour ditribution du gaz (Air Liquide)
- 2014 : Les trains ne disparaissent pas ! (SNCF)
- 2012 : Réaffectation de machines (Google)
- 2009 : Gestion des perturbations dans le domaine aérien (Amadeus)
- 2005 : Ordonnancement de véhicules pour une chaîne de montage automobile (Renault)

La programmation linéaire

La programmation linéaire (PL), c'est quoi ?

Définition : programmation linéaire

Outil mathématique servant à optimiser (maximiser/minimiser) une fonction objectif sur des variables, selon des contraintes sur ces variables. La fonction objectif et les contraintes sont toutes des (in)équations linéaires.

La programmation linéaire (PL), c'est quoi ?

Définition : programmation linéaire

Outil mathématique servant à optimiser (maximiser/minimiser) une fonction objectif sur des variables, selon des contraintes sur ces variables. La fonction objectif et les contraintes sont toutes des (in)équations linéaires.

Remarques :

Le terme “programmation”, issu du vocabulaire militaire, fait ici référence à la planification.

“Optimisation linéaire” serait aujourd'hui un meilleur terme, mais “programmation linéaire” est désormais standard.

La programmation linéaire (PL), c'est quoi ?

Définition : programmation linéaire

Outil mathématique servant à optimiser (maximiser/minimiser) une fonction objectif sur des variables, selon des contraintes sur ces variables. La fonction objectif et les contraintes sont toutes des (in)équations linéaires.

Exemple de programme linéaire

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}
$$

La programmation linéaire (PL), c'est quoi ?

Définition : programmation linéaire

Outil mathématique servant à optimiser (maximiser/minimiser) une fonction objectif sur des variables, selon des contraintes sur ces variables. La fonction objectif et les contraintes sont toutes des (in)équations linéaires.

Exemple de programme linéaire

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}$$

But : trouver une solution optimale, si elle existe.

La programmation linéaire (PL), c'est quoi ?

Définition : programmation linéaire

Outil mathématique servant à optimiser (maximiser/minimiser) une fonction objectif sur des variables, selon des contraintes sur ces variables. La fonction objectif et les contraintes sont toutes des (in)équations linéaires.

Exemple de programme linéaire

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}$$

But : trouver une solution optimale, si elle existe.

Vocabulaire :

$$\begin{array}{rcl}
x, y & \rightarrow & \text{variables} \\
max\, 10x + 5y & \rightarrow & \text{fonction objectif} \\
x + y \leq 1000 & \rightarrow & \text{contrainte} \\
x = 1, y = 0 & \rightarrow & \text{solution}(avec 10 comme valeur de la fonction objec
\end{array}$$

Un exemple concret : bien manger

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

Un exemple concret : bien manger

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

aliment	prix (€/kg)	protéines (g/kg)	vitamine C (mg/kg)	fer (mg/kg)
Ananas	3.1	5	478	3
Banane	2.1	10	70	12
Carotte	1.6	7.8	20	2.4
Datte	8.7	25	4	10
Endive	3.8	13	65	8

Un exemple concret : bien manger

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

aliment	prix (€/kg)	protéines (g/kg)	vitamine C (mg/kg)	fer (mg/kg)
Ananas	3.1	5	478	3
Banane	2.1	10	70	12
Carotte	1.6	7.8	20	2.4
Datte	8.7	25	4	10
Endive	3.8	13	65	8

Soient a, b, c, d, e les quantités d'ananas, bananes, carottes, dattes, endives.

minimiser : $3.1a + 2.1b + 1.6c + 8.7d + 3.8e$

Un exemple concret : bien manger

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

aliment	prix (€/kg)	protéines (g/kg)	vitamine C (mg/kg)	fer (mg/kg)
Ananas	3.1	5	478	3
Banane	2.1	10	70	12
Carotte	1.6	7.8	20	2.4
Datte	8.7	25	4	10
Endive	3.8	13	65	8

Soient a, b, c, d, e les quantités d'ananas, bananes, carottes, dattes, endives.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\text{minimiser :} & 3.1a & + & 2.1b & + & 1.6c & + & 8.7d & + & 3.8e & & \\
\text{tel que :} & 5a & + & 10b & + & 7.8c & + & 25d & + & 13e & \geq & 56 \\
 & 478a & + & 70b & + & 20c & + & 4d & + & 65e & \geq & 110 \\
 & 3a & + & 12b & + & 2.4c & + & 10d & + & 8e & \geq & 2 \\
 & & & & & & & & & a, b, c, d, e & \geq & 0
\end{array}$$

Un exemple concret : bien manger

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

aliment	prix (€/kg)	protéines (g/kg)	vitamine C (mg/kg)	fer (mg/kg)
Ananas	3.1	5	478	3
Banane	2.1	10	70	12
Carotte	1.6	7.8	20	2.4
Datte	8.7	25	4	10
Endive	3.8	13	65	8

Soient a, b, c, d, e les quantités d'ananas, bananes, carottes, dattes, endives.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser :} & 3.1a & + & 2.1b & + & 1.6c & + & 8.7d & + & 3.8e & & \\
\text{tel que :} & 5a & + & 10b & + & 7.8c & + & 25d & + & 13e & \geq & 56 \\
 & 478a & + & 70b & + & 20c & + & 4d & + & 65e & \geq & 110 \\
 & 3a & + & 12b & + & 2.4c & + & 10d & + & 8e & \geq & 2 \\
 & & & & & & & & & a, b, c, d, e & \geq & 0
\end{array}$$

Solution optimale : 7.18 kg de carottes pour 11.49€ !

Un exemple concret : bien manger

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

aliment	prix (€/kg)	protéines (g/kg)	vitamine C (mg/kg)	fer (mg/kg)
Ananas	3.1	5	478	3
Banane	2.1	10	70	12
Carotte	1.6	7.8	20	2.4
Datte	8.7	25	4	10
Endive	3.8	13	65	8

Soient a, b, c, d, e les quantités d'ananas, bananes, carottes, dattes, endives.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser :} & 3.1a & + & 2.1b & + & 1.6c & + & 8.7d & + & 3.8e & & \\
\text{tel que :} & 5a & + & 10b & + & 7.8c & + & 25d & + & 13e & \geq & 56 \\
 & 478a & + & 70b & + & 20c & + & 4d & + & 65e & \geq & 110 \\
 & 3a & + & 12b & + & 2.4c & + & 10d & + & 8e & \geq & 2 \\
 & & & & & & & & & a, b, c, d, e & \geq & 0
\end{array}$$

Solution optimale : 7.18 kg de carottes pour 11.49€ !

Si on rajoute les contraintes $a, b, c, d, e \leq 1$:
Solution optimale à 16.32€ avec 4g d'ananas et 1kg des autres aliments.

Le “diet problem” : un peu d’histoire

C’est historiquement le premier problème sur lequel George B. Dantzig aurait testé son algorithme dit du “simplexe” pour résoudre des programmes linéaires.

Il y avait bien sûr énormément de types d’aliments possibles :
77 variables, 9 contraintes → 120 jours de travail pour le résoudre à la main !

G. B. Dantzig (1914-2005)

Le “diet problem” : un peu d’histoire

C’est historiquement le premier problème sur lequel George B. Dantzig aurait testé son algorithme dit du “simplexe” pour résoudre des programmes linéaires.

Il y avait bien sûr énormément de types d’aliments possibles :
77 variables, 9 contraintes → 120 jours de travail pour le résoudre à la main !

La légende dit que la première solution proposait de consommer plusieurs litres de vinaigre par jour. Ou bien 200 cubes de bouillon.

G. B. Dantzig (1914-2005)

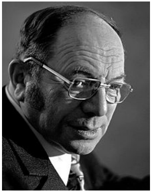
Histoire abrégée de la PL

> *Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle.*
>
> M. Grötschl

Histoire abrégée de la PL

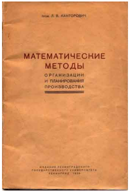
> *Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle.* M. Grötschl

- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)



L. V. Kantorovich

(1912-1986)

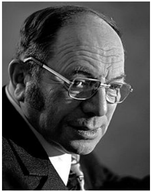


Mathematical methods in organization and planning production, Univ. de Leningrad, 1939

Histoire abrégée de la PL

Du point de vue de l’économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle. M. Grötschl

- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l’armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)



L. V. Kantorovich

(1912-1986)

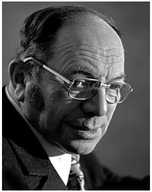
G. B. Dantzig

(1914-2005)

Histoire abrégée de la PL

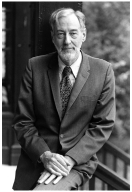
> *Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle.* M. Grötschl

- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l'armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)
- 1975 : "Prix Nobel" d'économie (Leonid V. Kantorovich et Tjalling C. Koopmans)



L. V. Kantorovich (1912-1986)

G. B. Dantzig (1914-2005)

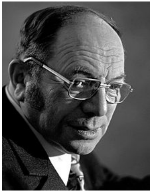


T. C. Koopmans (1910-1985)

Histoire abrégée de la PL

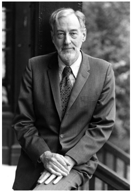
> *Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle.* M. Grötschl

- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l'armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)
- 1975 : "Prix Nobel" d'économie (Leonid V. Kantorovich et Tjalling C. Koopmans)
- 1979 : Méthode de l'ellipsoïde (Leonid G. Khachiyan)



L. V. Kantorovich (1912-1986)

G. B. Dantzig (1914-2005)



T. C. Koopmans (1910-1985)

L. G. Khachiyan (1952-2005)

ARCHIVES 1979

A Soviet Discovery Rocks World of Mathematics

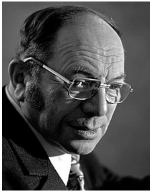
By MALCOLM W. BROWNE NOV. 7, 1979

A surprise discovery by an obscure Soviet mathematician has rocked the world of mathematics and computer analysis, and experts have begun exploring its practical applications.

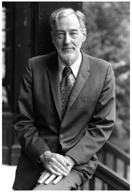
Histoire abrégée de la PL

> *Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle.* — M. Grötschl

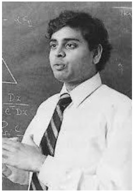
- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l'armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)
- 1975 : "Prix Nobel" d'économie (Leonid V. Kantorovich et Tjalling C. Koopmans)
- 1979 : Méthode de l'ellipsoïde (Leonid G. Khachiyan)
- 1984 : Méthode des points intérieurs (Narendra Karmarkar)


L. V. Kantorovich (1912-1986)


G. B. Dantzig (1914-2005)


T. C. Koopmans (1910-1985)


L. G. Khachiyan (1952-2005)


N. Karmarkar (1956-)


Breakthrough in Problem Solving

THE NEW YORK TIMES, November 19, 1984


Folding the Perfect Corner

TIME MAGAZINE, December 3, 1984

Un PL à une variable

Soit x la quantité mensuelle de bois (en tonnes) utilisée par une menuiserie.
Chaque tonne coûte 500€

$$\begin{array}{llcl}
\text{minimiser :} & 500x & & \\
\text{tel que :} & x & \geq & 10 \\
 & 2x & \leq & 50 \\
 & x & \geq & 0
\end{array}$$

Un PL à une variable

Soit x la quantité mensuelle de bois (en tonnes) utilisée par une menuiserie.
Chaque tonne coûte 500€

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimiser :} & 500x & & \\ \text{tel que :} & x & \geq & 10 \\ & 2x & \leq & 50 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Un PL à une variable

Soit x la quantité mensuelle de bois (en tonnes) utilisée par une menuiserie.
Chaque tonne coûte 500€

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{minimiser :} & 500x & & \\
\text{tel que :} & x & \geq & 10 \\
 & 2x & \leq & 50 \\
 & x & \leq & 5
\end{array}
$$

Diet problem, le retour

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

aliment	prix (€/kg)	protéines (g/kg)	vitamine C (mg/kg)	fer (mg/kg)
Ananas	3.1	5	478	3
Banane	2.1	10	70	12
Carotte	1.6	7.8	20	2.4
Datte	8.7	25	4	10
Endive	3.8	13	65	8

Soient a, b, c, d, e les quantités d'ananas, bananes, carottes, dattes, endives.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser :} & 3.1a & + & 2.1b & + & 1.6c & + & 8.7d & + & 3.8e & & \\
\text{tel que :} & 5a & + & 10b & + & 7.8c & + & 25d & + & 13e & \geq & 56 \\
 & 478a & + & 70b & + & 20c & + & 4d & + & 65e & \geq & 110 \\
 & 3a & + & 12b & + & 2.4c & + & 10d & + & 8e & \geq & 2 \\
 & & & & & & & & & a, b, c, d, e & \geq & 0
\end{array}
$$

Simplifions le problème !

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (50g), vitamine C (100mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane

Simplifions le problème !

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (50g), vitamine C (100mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane

aliment	prix (€/kg)	protéines (g/kg)	vitamine C (mg/kg)	fer (mg/kg)
Ananas	1	5	500	2
Banane	1	10	50	4

Soient a, b les quantités d'ananas et bananes (en kg).

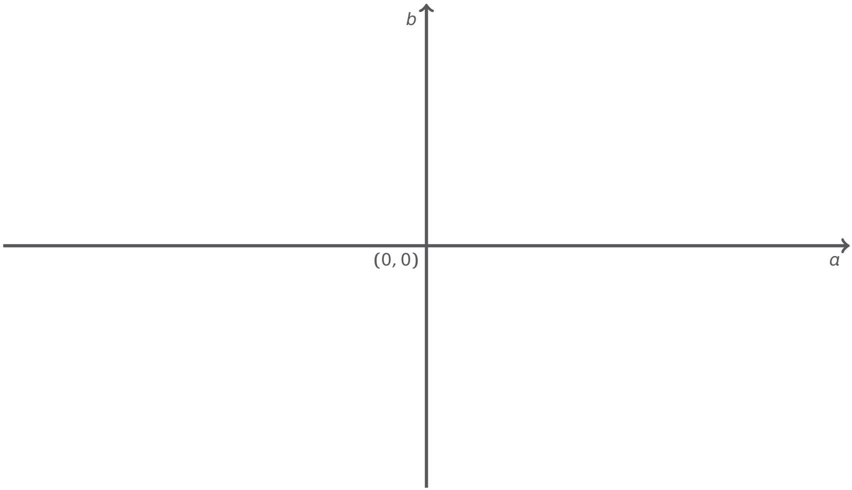
$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{minimiser :} & a & + & b & & \\
\text{tel que :} & 5a & + & 10b & \geq & 50 \\
 & 500a & + & 50b & \geq & 100 \\
 & 2a & + & 4b & \geq & 2 \\
 & & a, b & & \geq & 0
\end{array}
$$

L'espace de solutions, c'est le plan

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{minimiser :} & a & + & b & & \\
\text{tel que :} & 5a & + & 10b & \geq & 50 \\
 & 500a & + & 50b & \geq & 100 \\
 & 2a & + & 4b & \geq & 2 \\
 & & & a, b & \geq & 0
\end{array}
$$

L’espace de solutions, c’est le plan

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{minimiser :} & a & + & b & & \\
\text{tel que :} & 5a & + & 10b & \geq & 50 \\
 & 500a & + & 50b & \geq & 100 \\
 & 2a & + & 4b & \geq & 2 \\
 & & & a, b & \geq & 0
\end{array}
$$



L’espace de solutions, c’est le plan

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{minimiser :} & a & + & b & & \\
\text{tel que :} & 5a & + & 10b & \geq & 50 \\
 & 500a & + & 50b & \geq & 100 \\
 & 2a & + & 4b & \geq & 2 \\
 & & & a, b & \geq & 0
\end{array}
$$

Un deuxième exemple

$$
\begin{array}{llllll}
\text{minimiser :} & 10a & + & 4b & & \\
\text{tel que :} & 3a & + & 2b & \geq & 60 \\
 & 7a & + & 2b & \geq & 84 \\
 & 3a & + & 6b & \geq & 72 \\
 & & a, b & & \geq & 0
\end{array}
$$

Un deuxième exemple

$$
\begin{array}{llllll}
\text{minimiser :} & 10a & + & 4b & & \\
\text{tel que :} & 3a & + & 2b & \geq & 60 \\
 & 7a & + & 2b & \geq & 84 \\
 & 3a & + & 6b & \geq & 72 \\
 & & a, b & & \geq & 0
\end{array}
$$

Représentation géométrique d'un programme linéaire

Exemple de programme linéaire

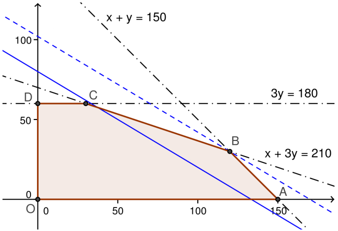
$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}
$$

Représentation géométrique d'un programme linéaire

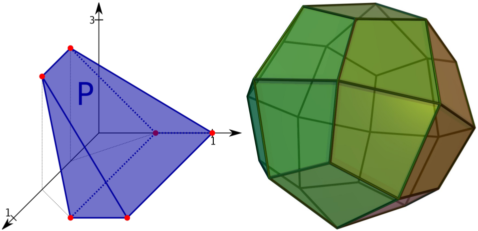
- On se place dans un espace à n dimensions, où n est le nombre de variables du PL.

- Chaque contrainte est modélisée par un espace à $n-1$ dimensions, qui divise notre espace en deux parties :
  → les points qui satisfont ou ne satisfont pas la contrainte.

- Ces contraintes définisssent un polytope convexe, qui contient tous les points correspondant à une solution du PL.
  Chaque contrainte produit une facette du polytope.



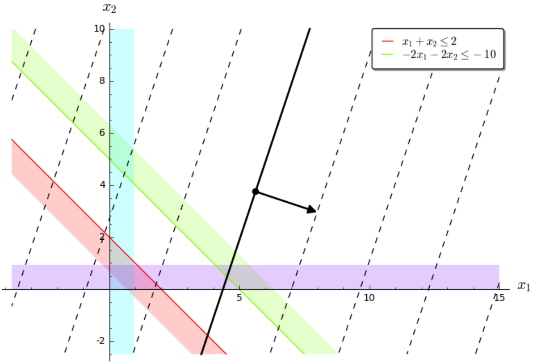
2 variables : polygone



3 variables : polyèdre

Quatre types de programmes linéaires

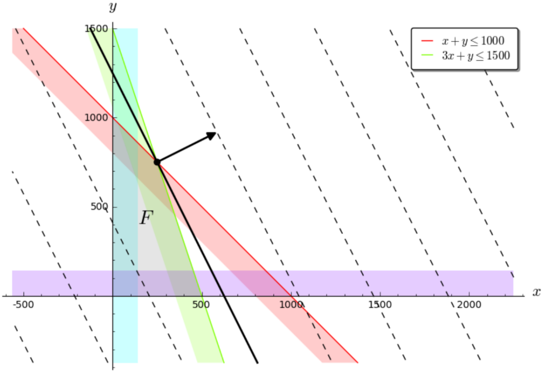
1. Pas de solution du tout



1

Quatre types de programmes linéaires

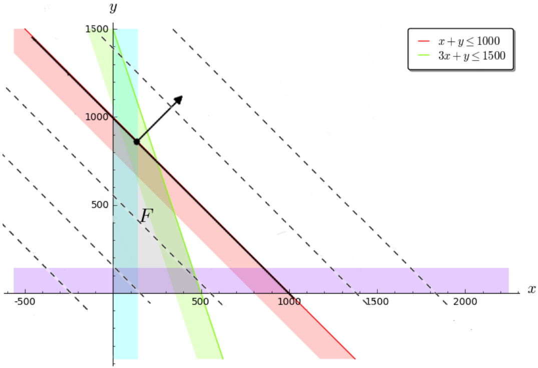
1. Pas de solution du tout
2. Une solution optimale unique, sur un sommet du polytope



2

Quatre types de programmes linéaires

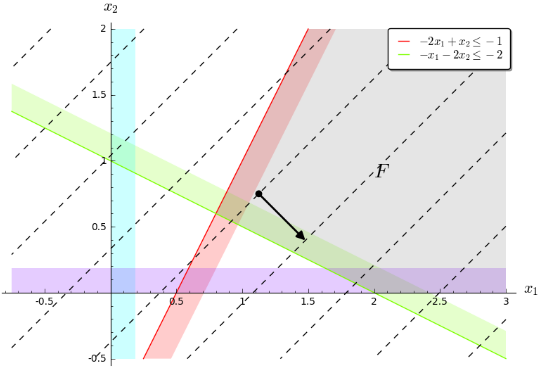
1. Pas de solution du tout
2. Une solution optimale unique, sur un sommet du polytope
3. Une infinité de solutions optimales, sur une arête du polytope



3

Quatre types de programmes linéaires

1. Pas de solution du tout
2. Une solution optimale unique, sur un sommet du polytope
3. Une infinité de solutions optimales, sur une arête du polytope
4. Une infinité de solutions, mais pas de solution optimale : PL non borné



4