Université Clermont Auvergne
BUT Info 3A
R5.A.04 - Qualité algorithmique

Florent Foucaud
Pascal Lafourcade
Malika More

TD4 - Réductions

1 Rappel de cours

Complexité des problèmes algorithmiques vs. complexité des algorithmes

- Problème algorithmique : une entrée, une sortie
  - Trier une liste de n entiers
  - Déterminer si un graphe est 3-colorable
  - Déterminer si une formule en CNF est satisfaisable
- Algorithme
  - série d'instructions qui résoud un certain problème algorithmique
  - pour une machine $\approx$ programme informatique
- Complexité d'un algorithme : quantité de ressources nécessaires à l'algorithme, en fonction de la taille n de l'entrée
- Complexité d'un problème algorithmique : meilleure complexité d'un algorithme qui résoud ce problème

1.1 Problèmes de décision

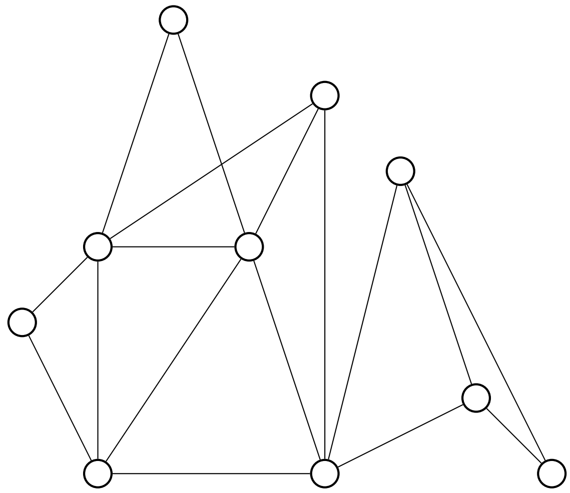
Vocabulaire Problème de décision $\rightsquigarrow$ problème algorithmique à réponse oui/non

- **k-colorabilité** : déterminer si un graphe est k-colorable
- **SAT** : déterminer si une formule en CNF est satisfaisable

Un problème algorithmique célèbre

3-**colorabilité**

- Deux sommets reliés par une arête ne peuvent pas être de la même couleur
- Peut-on colorier tous les sommets avec 3 couleurs ?



k-colorabilité

- `Entrée` : un graphe G
- `Question` : le graphe G peut-il être colorié avec k couleurs ?

(Deux sommets reliés par une arête ne doivent pas être de la même couleur)

NE PAS CONFONDRE

vérifier une k-coloration

- `Entrée` : un graphe G colorié avec k couleurs
- `Question` : cette coloration est-elle valide ?

Complexité $\rightsquigarrow \mathcal{O}(n+m)$ (n sommets, m arêtes)

Un algorithme qui marche toujours, mais...

Recherche exhaustive

- Tester tous les coloriages possibles
- Vérifier la validité de chaque coloriage
- Décider si oui ou non G est k-coloriable

$$n \text{ sommets} \quad \rightsquigarrow \quad k^n \text{ coloriages}$$

Dans la vraie vie

- n est souvent grand
- le temps de calcul devient rapidement impraticable

Complexité de cet algorithme

- $\mathcal{O}((n+m)k^n) \quad \rightsquigarrow \quad$ exponentielle

1.2 Réductions

Un problème plus facile qu'un autre ?

Min « plus facile » que **Tri**

- je sais trier un tableau $\rightsquigarrow$ je sais trouver le minimum de ce tableau
- un algorithme pour **Tri** permet de fabriquer un algorithme pour **Min**

Réduction (polynomiale)

$\mathcal{P}_1$

- `Entrée` : E_1
- `Question` : E_1 possède P_1 ?

$\mathcal{P}_2$

- `Entrée` : E_2
- `Question` : E_2 possède P_2 ?

Transformer E_1 en E_2 (en temps polynomial)
de telle sorte que
E_1 possède $P_1 \iff E_2$ possède P_2

$\mathcal{P}_1$ se réduit à $\mathcal{P}_2$ (en temps polynomial)

- Algo pour $\mathcal{P}_2$: A_2 (polynomial)
- Algo pour $\mathcal{P}_1$: $E_1 \rightsquigarrow E_2 \overset{A_2}{\rightsquigarrow}$ oui ou non (en temps polynomial)

$\mathcal{P}_1$ est « plus facile » que $\mathcal{P}_2$

2 Exercices

Exercice 1 (Cliques et indépendance dans un graphe)**.**

Dans un graphe $G = (V, E)$, une *clique* est un ensemble S de sommets de G tel que tous les sommets de S sont reliés deux à deux par une arête.

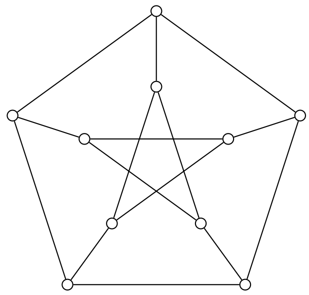
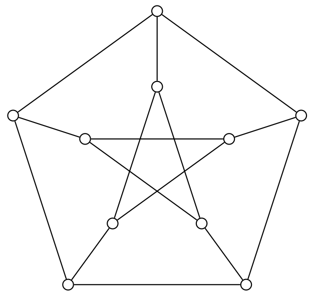
Un *ensemble indépendant* de G est un ensemble S de sommets tels qu'aucune paire de sommets de S n'est reliée par une arête dans G.

On définit les deux problèmes de décision associés :

CLIQUE
Instance: Un graphe G, un entier k.
Question: G admet-il une clique de taille *au moins* k ?

ENSEMBLE INDÉPENDANT
Instance: Un graphe G, un entier k.
Question: G admet-il un ensemble indépendant de taille *au moins* k ?

1. Trouver une clique de taille maximum et un ensemble indépendant de taille maximum sur le graphe de la figure ci-dessous (griser les sommets correspondants).

On définit le *complémentaire* $\overline{G}$ du graphe $G = (V, E)$ comme le graphe ayant comme sommets V et comme arêtes, toutes les arêtes qui ne sont *pas* dans E.

2. Dessiner le complémentaire du graphe de la figure (seulement les six sommets du haut, sinon ça sera illisible).
3. Montrer que si S est une clique de G, alors S est un ensemble indépendant de $\overline{G}$. De même, montrer que si S est un ensemble indépendant de G, alors S est une clique de $\overline{G}$.
4. Montrer que $\overline{\overline{G}} = G$. En déduire que si S est un ensemble indépendant de $\overline{G}$, alors S est une clique de G.
5. En déduire une réduction polynomiale de Clique vers Ensemble Indépendant, et une seconde réduction polynomiale de Ensemble Indépendant vers Clique.

Exercice 2 (Couvertures et indépendance dans un graphe)**.**

Dans un graphe $G = (V, E)$, une *couverture par sommets* est un ensemble S de sommets de G tel que chaque arête a au moins une de ses deux extrémités dans S.

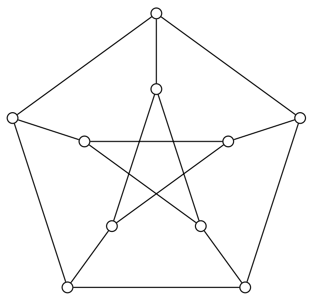
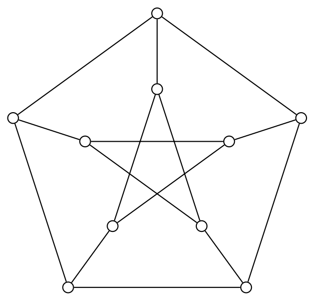
Rappel : un *ensemble indépendant* de G est un ensemble S de sommets tels qu'aucune paire de sommets de S n'est reliée par une arête dans G.

On rappelle/définit les deux problèmes de décision associés :

Couverture Par Sommets
Instance: Un graphe G, un entier k.
Question: G admet-il une couverture par sommets de taille *au plus* k ?

Ensemble Indépendant
Instance: Un graphe G, un entier k.
Question: G admet-il un ensemble indépendant de taille *au moins* k ?

1. Dans un graphe, on s'intéresse à l'existence d'ensembles indépendants de grande taille et à l'existence de couvertures par sommets de petite taille. Pourquoi ?
2. Trouver une couverture par sommets de taille minimum et un ensemble indépendant de taille maximum sur le graphe de la figure ci-dessous (griser les sommets correspondants).

3. Montrer que si S est un ensemble indépendant, alors l'ensemble $V(G) \setminus S$ est une couverture par sommets.
4. Montrer que si S est une couverture par sommets, alors l'ensemble $V(G) \setminus S$ est un ensemble indépendant.
5. En déduire une réduction polynomiale de ENSEMBLE INDÉPENDANT vers COUVERTURE PAR SOMMETS, et une seconde réduction polynomiale de COUVERTURE PAR SOMMETS vers ENSEMBLE INDÉPENDANT.

Exercice 3 (Cliques et ensembles dominants)**.**

Dans un graphe $G = (V, E)$, une *clique* est un ensemble S de sommets de G tel que tous les sommets de S sont reliés deux à deux par une arête.

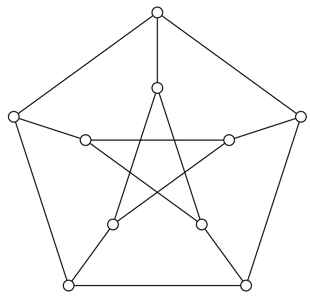
Dans un graphe $G = (V, E)$, un *ensemble dominant* de G est un ensemble S de sommets tel que tout sommet qui n'appartient pas à S possède au moins une arête d'extrémité un sommet de S (autrement dit, un voisin dans S).

On rappelle/définit les deux problèmes de décision associés :

CLIQUE
Instance: Un graphe G, un entier k.
Question: G admet-il une clique de taille *au moins* k ?

ENSEMBLE DOMINANT
Instance: Un graphe G, un entier k.
Question: G admet-il un ensemble dominant de taille *au plus* k ?

1. Dessinez un graphe à 8 sommets comportant une clique maximale de taille 6.
2. Trouvez un ensemble dominant de taille minimale dans le graphe ci-dessous.

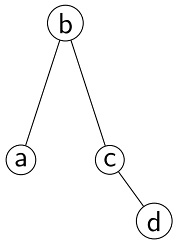


3. À partir d'un graphe $G = (V, E)$, on construit un nouveau graphe G' comme suit.
   - Pour chaque "non-arête" de G, disons x et y qui ne sont pas reliés dans G, G' comporte trois sommets : l'un nommé x, l'autre nommé y et un troisième nommé par exemple xy. Et G' comporte de plus les trois arêtes $\{x, y\}$, $\{x, xy\}$ et $\{y, xy\}$.
   - Enfin, pour des raisons techniques pas très intéressantes, G' possède aussi un sommet "universel" u, relié à tous les autres et un dernier sommet noté u', relié uniquement à u

   Dessinez le graphe G' associé aux 6 sommets du haut du graphe de Petersen (sinon ça sera illisible).
4. Montrez que si G possède une clique de taille k, alors G' possède un ensemble dominant de taille $|V(G)| - k + 1$.

5. Réciproquement, montrez que si G' possède un ensemble dominant de taille $|V(G)| - k + 1$, alors G possède une clique de taille k.
6. En déduire une réduction polynomiale de CLIQUE vers ENSEMBLE DOMINANT.
7. Cette construction ne permet pas de définir une réduction polynomiale de ENSEMBLE DOMINANT vers CLIQUE, pourquoi ?
8. À partir d'un graphe $G = (V, E)$, on construit un nouveau graphe G' comme suit.
   - Pour chaque arête de G, disons $e = \{u, v\}$, G' possède deux sommets, l'un appelé (u, v) et l'autre appelé (v, u).
   - Pour définir les arêtes de G', c'est plus compliqué. Soient deux sommets de G', disons (u_1, v_1) et (u_2, v_2). G' possède une arête entre ces deux sommets lorsque **à la fois** u_1 n'est ni u_2 ni v_2 **et aussi** u_2 n'est ni u_1 ni v_1.

   Dessinez le graphe G' obtenu à partir du graphe G ci-dessous.



9. Montrez que si G possède un ensemble dominant de taille k, alors G' possède une clique de taille $|V(G)| - k$.
10. Réciproquement, montrez que si G' possède une clique de taille $|V(G)| - k$, alors G possède un ensemble dominant de taille k.
11. En déduire une réduction polynomiale de ENSEMBLE DOMINANT vers CLIQUE.