
TD2 : L'algo du simplexe

Exercice 1 (Forme standard).

Mettre les programmes linéaires suivants sous forme standard. (Rappel : la fonction objectif maximise, les variables sont positives ou nulles, les autres contraintes sont des égalités.)

1. maximiser $3x_1 - 5x_2$
tel que $4x_1 + 5x_2 \geq 3$
 $6x_1 - 6x_2 = 7$
 $x_1 + 8x_2 \leq 20$
 $x_1 \geq 0$
 $x_2 \geq 0$
2. minimiser $8x_1 - 4x_2$
tel que $3x_1 + x_2 \leq 7$
 $9x_1 + 5x_2 \leq -2$
 $x_1 \geq 0$
 $x_2 \leq 0$

Exercice 2 (Votre premier simplexe).

$$\begin{aligned} \text{maximiser : } z &= 10x + 5y \\ \text{tel que : } & \quad x + y \leq 1000 \\ & \quad 3x + y \leq 1500 \\ & \quad x \geq 0 \\ & \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Mettre le programme linéaire sous forme standard.
- (b) Dérouler l'algorithme du simplexe pour trouver la solution optimale.
- (c) L'interpréter graphiquement sur les variables originelles x, y .

Rappel des étapes de l'algorithme :

0. On part d'un PL en forme standard
1. On trouve une solution non-optimale en un point du polytope associé à notre PL (typiquement, avec les variables originelles à 0)
2. Tant qu'on peut, on évolue vers une *solution proche* qui *améliore* la fonction objectif, en réitérant :
 - a. Déterminer les variables basiques (non-nulles dans la solution courante)
 - b. Écrire le tableau de simplexe qui exprime les variables basiques et la fonction objectif z en fonction des variables non-basiques
 - c. Trouver *une* variable non-basique à augmenter pour augmenter z : c'est le *pivot*
 - d. Si aucun pivot n'existe (on ne peut plus augmenter z), la solution courante était optimale! STOP
 - e. Sinon, augmenter le pivot au maximum possible en fonction des contraintes données par $x_i \geq 0$, où x_i sont les variables basiques.
(s'il n'y a pas de restriction sur le pivot, le PL est non borné : STOP)
 - f. Calculer les nouvelles valeurs des variables : on obtient une nouvelle solution.

Exercice 3 (Simplexe et légumes).

Voici le programme linéaire du problème des navets et courgettes vu au TD1.

$$\begin{aligned} \text{maximiser : } z &= 4x_1 + 5x_2 \\ \text{tel que : } & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Mettre le programme linéaire sous forme standard.
- (b) Dérouler l'algorithme du simplexe pour trouver la solution optimale.
- (c) L'interpréter graphiquement sur les variables originelles x_1, x_2 .

Exercice 4 (Simplexe, encore et toujours).

$$\begin{aligned} \text{maximiser : } z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{tel que : } & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Mettre le programme linéaire sous forme standard.
- (b) Dérouler l'algorithme du simplexe pour trouver la solution optimale.