Florent Foucaud

TD3 : Programmation linéaire en nombres entiers

Exercice 1 (Problème du sac à dos)**.**

Un randonneur veut remplir son sac à dos de capacité (poids maximal) $W = 22$ en maximisant l'utilité totale des objets qu'il emporte avec lui. Les objets à sa disposition sont :

	objet	utilité	poids
A	barres énergétiques	12	3
B	pull	12	4
C	carte	9	3
D	gourde	15	3
E	tente	26	13

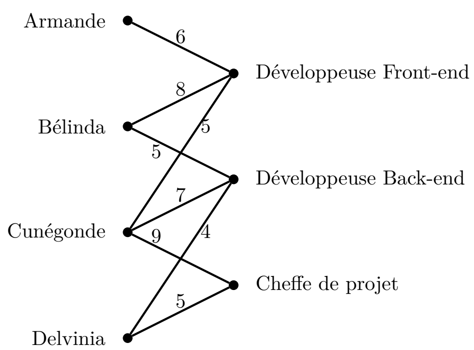
(a) Donner une solution réalisable du problème (pas forcément optimale).
(b) Proposer un programme linéaire en nombres entiers (PLNE) pour le modéliser.

Le problème général dit du "sac à dos" (un grand classique en RO) est défini par un ensemble de n objets $\{O_1, \ldots, O_n\}$. Chaque objet O_i a une utilité u_i et un poids p_i. Le randonneur a un sac de capacité W, et on veut sélectionner un sous-ensemble d'objets à placer dans le sac de façon à maximiser l'utilité totale.

(c) Modéliser le problème général du sac à dos par un PLNE.

Exercice 2 (Problème du couplage maximum dans un graphe)**.**

On se donne le graphe suivant, qui modélise un problème d'affectation (couplage) de candidates à des postes dans une entreprise. Une arête qui relie une candidate a et un poste x avec un poids p signifie que a est apte pour le poste x, avec l'aptitude p. Chaque candidate est affectée à au plus un poste, et chaque poste, à au plus une candidate. On cherche un couplage qui maximise la somme des aptitudes.



(a) Donner une solution réalisable du problème (pas forcément optimale).
(b) Proposer un PLNE pour le modéliser.

Le problème général du couplage maximum (un autre problème classique) est défini pour un graphe $G = (V, E)$ avec pour chaque arête e de E, un poids $p(e)$. On cherche un ensemble C d'arêtes dont le poids total est le plus grand possible, tel qu'aucune paire d'arêtes sélectionnées dans C ne partage de sommet.

(c) Modéliser le problème général du couplage maximum par un PLNE.

Exercice 3 (Voyageur de commerce).

Dans le problème du voyageur de commerce (*Travelling Salesperson Problem*, TSP, en anglais), on a un ensemble de villes avec les distances qui les séparent. On veut parcourir toutes les villes et revenir au point de départ, en minimisant la distance totale parcourue. Par exemple, avec les villes suivantes :

	Clermont-Ferrand	Bordeaux	Toulouse	Lyon
Clermont-Ferrand	-	376	377	167
Bordeaux	376	-	244	556
Toulouse	377	244	-	538
Lyon	167	556	538	-

(a) Décrire une solution réalisable du problème (pas forcément optimale).

(b) Proposer un PLNE pour le modéliser, en s'inspirant de la modélisation du problème de plus court chemin, vue en cours. *(Une difficulté ici est de s'assurer que le parcours soit connexe : pour cela on peut demander à ce que chaque sous-ensemble de villes a au moins une connexion vers le reste.)*

Dans le problème général, les villes sont indexées par des entiers : $v_1, \ldots, v_n$ et la distance entre deux villes v_i et v_j est notée $d(i, j)$.

(c) Proposer un PLNE pour modéliser la version générale du problème.