Recherche opérationnelle

DUT Info 2e année, parcours A

Différentes formes d'un programme linéaire

Florent Foucaud

IUT CLERMONT AUVERGNE

Aurillac - Clermont-Ferrand - Le Puy-en-Velay
Montluçon - Moulins - Vichy

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}
$$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$
\begin{array}{llcrcrcl}
\text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcrcrcl}
\text{max. :} & -10x & - & 5y & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}
$$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des ≤
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{max. :} & -10x & - & 5y & & \\
\text{t.q. :} & -1.5x & + & 2y & \leq & -1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}$$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{max. :} & -10x & - & 5(y'-2) & & \\
\text{t.q. :} & -1.5x & + & 2(y'-2) & \leq & -1000 \\
 & 3x & + & y'-2 & \leq & 1500 \\
 & & & y' & \geq & 0
\end{array}$$

1. On pose $y = y' - 2$ avec $y' \geq 0$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\ \text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\ & 3x & + & y & \leq & 1500 \\ & & & y & \geq & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{max. :} & -10x & - & 5y' & & \\ \text{t.q. :} & -1.5x & + & 2y' & \leq & -996 \\ & 3x & + & y' & \leq & 1502 \\ & & & y' & \geq & 0 \end{array}$$

1. On pose $y = y' - 2$ avec $y' \geq 0$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$\begin{array}{llllll}
\text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
\text{max. :} & & -10(x^+ - x^-) & - & 5y' & & \\
\text{t.q. :} & & -1.5(x^+ - x^-) & + & 2y' & \leq & -996 \\
 & & 3(x^+ - x^-) & + & y' & \leq & 1502 \\
 & & & & y' & \geq & 0 \\
 & x^+ & & & & \geq & 0 \\
 & & x^- & & & \geq & 0
\end{array}$$

1. On pose $y = y' - 2$ avec $y' \geq 0$
2. On pose $x = x^+ - x^-$ avec $x^+, x^- \geq 0$

Reformulation d'un PL

Souvent, on standardise les PL avec les conditions suivantes :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{minimiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \geq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & & & y & \geq & -2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{max. :} & -10x^+ & + & 10x^- & - & 5y' & & \\
\text{t.q. :} & -1.5x^+ & + & 1.5x^- & + & 2y' & \leq & -996 \\
 & 3x^+ & - & 3x^- & + & y' & \leq & 1502 \\
 & & & & & y' & \geq & 0 \\
 & x^+ & & & & & \geq & 0 \\
 & & & x^- & & & \geq & 0
\end{array}$$

1. On pose $y = y' - 2$ avec $y' \geq 0$
2. On pose $x = x^+ - x^-$ avec $x^+, x^- \geq 0$

Forme standard d'un PL

Un programme linéaire est sous forme standard si :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des ≤
- Les variables sont toutes ≥ 0
- Les contraintes (autres que "variable ≥ 0") sont des égalités

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}
$$

Forme standard d'un PL

Un programme linéaire est sous forme standard si :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0
- Les contraintes (autres que "variable ≥ 0") sont des égalités

$$
\begin{array}{llllll}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & & & & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & + & e_1 & & & = & 1000 \\
 & 3x & + & y & & & + & e_2 & = & 1500 \\
 & x & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & y & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & e_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & e_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

On introduit une variable d'écart pour chaque contrainte

Forme standard d'un PL

Un programme linéaire est sous forme standard si :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0
- Les contraintes (autres que "variable ≥ 0") sont des égalités

$$\begin{array}{llllll}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & & & & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & + & e_1 & & & = & 1000 \\
 & 3x & + & y & & & + & e_2 & = & 1500 \\
 & x & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & y & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & e_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & e_2 & \geq & 0
\end{array}$$

On introduit une variable d'écart pour chaque contrainte

Remarque : $2x - 3y \geq 1000$ est équivalent à $2x - 3y - e = 1000$ et $e \geq 0$

Forme standard d'un PL

Un programme linéaire est sous forme standard si :

- La fonction objectif est à maximiser
- Les contraintes avec ≥ 2 variables sont des $\leq$
- Les variables sont toutes ≥ 0
- Les contraintes (autres que "variable ≥ 0") sont des égalités

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{max. :} & 10x & + & 5y & & & & & & \\
\text{t.q. :} & 1.5x & - & 2y & + & e_1 & & & = & 1000 \\
 & 3x & + & y & & & + & e_2 & = & 1500 \\
 & x & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & y & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & e_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & e_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

On introduit une variable d'écart pour chaque contrainte

Proposition

Tout PL est équivalent à sa forme standard.