Recherche opérationnelle

DUT Info 2e année, parcours A

Programmation linéaire en nombres entiers

Florent Foucaud

IUT CLERMONT AUVERGNE

Aurillac - Clermont-Ferrand - Le Puy-en-Velay
Montluçon - Moulins - Vichy

Solution pas entière ?

- Solution d'un PL : pas forcément des valeurs entières.

Solution pas entière ?

- Solution d'un PL : pas forcément des valeurs entières.
- Dans de nombreux contextes, nos variables doivent prendre une solution entière
  (exemple : nombre de machines, groupes pour l'emploi du temps, etc).

Solution pas entière ?

- Solution d'un PL : pas forcément des valeurs entières.
- Dans de nombreux contextes, nos variables doivent prendre une solution entière
(exemple : nombre de machines, groupes pour l'emploi du temps, etc).
- Pour cela on va modéliser des programmes linéaires en nombres entiers
(ou mixtes)

Exemple : presser ou tourner

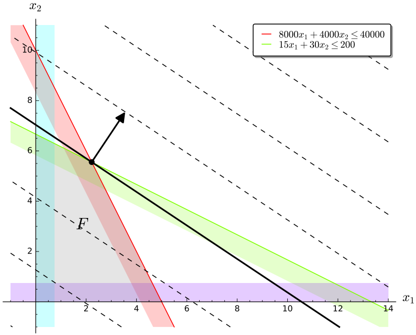
Exemple 1

Un start-upper dispose d'un budget de 40k€ pour équiper son atelier de 200m^2 avec des presses et des tours.

- Une presse coûte 8k€, un tour 4k€.
- Une presse prend 15 m^2, un tour prend 30 m^2.
- Profit journalier d'une presse : 100 €, celui d'un tour : 150 €.

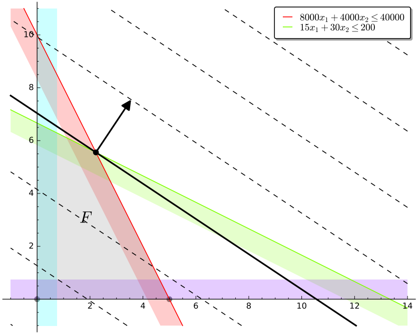
Presser ou Tourner

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & 100x_1 & + & 150x_2 & & \\
\text{tel que :} & 8000x_1 & + & 4000x_2 & \leq & 40000 \\
 & 15x_1 & + & 30x_2 & \leq & 200 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$



Simplexe

$$\begin{array}{llllllll}
\text{maximiser :} & 100x_1 & + & 150x_2 & & & & \\
\text{tel que :} & 8000x_1 & + & 4000x_2 & + x_3 & & = & 40000 \\
 & 15x_1 & + & 30x_2 & & + x_4 & = & 200 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$



$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 40000 & - & 8000x_1 & - & 4000x_2 \\
x_4 & = & 200 & - & 15x_1 & - & 30x_2 \\
\hline
z & = & 0 & + & 100x_1 & + & 150x_2
\end{array}$$

Entre : x_1. Sort : x_3.

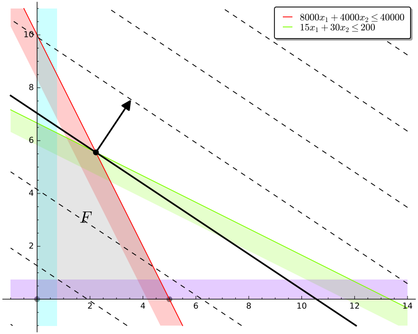
$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 5 & - & \frac{1}{8000}x_3 & - & \frac{1}{2}x_2 \\
x_4 & = & 125 & + & \frac{3}{1600}x_3 & - & \frac{45}{2}x_2 \\
\hline
z & = & 500 & - & \frac{1}{80}x_3 & + & 100x_2
\end{array}$$

Entre : x_2. Sort : x_4.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & \frac{20}{9} & - & \frac{1}{6000}x_3 & + & \frac{1}{45}x_4 \\
x_2 & = & \frac{50}{9} & + & \frac{1}{12000}x_3 & - & \frac{2}{45}x_4 \\
\hline
z & = & \frac{9500}{9} & - & \frac{1}{240}x_3 & - & \frac{40}{9}x_4
\end{array}$$

Simplexe

$$\begin{array}{llllllll}
\text{maximiser :} & 100x_1 & + & 150x_2 & & & & \\
\text{tel que :} & 8000x_1 & + & 4000x_2 & + & x_3 & & = & 40000 \\
 & 15x_1 & + & 30x_2 & & & + & x_4 & = & 200 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & & \geq & 0
\end{array}$$



$$\begin{array}{ccccccc}
x_3 & = & 40000 & - & 8000x_1 & - & 4000x_2 \\
x_4 & = & 200 & - & 15x_1 & - & 30x_2 \\
\hline
z & = & 0 & + & 100x_1 & + & 150x_2
\end{array}$$

Entre : x_1. Sort : x_3.

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & = & 5 & - & \frac{1}{8000}x_3 & - & \frac{1}{2}x_2 \\
x_4 & = & 125 & + & \frac{3}{1600}x_3 & - & \frac{45}{2}x_2 \\
\hline
z & = & 500 & - & \frac{1}{80}x_3 & + & 100x_2
\end{array}$$

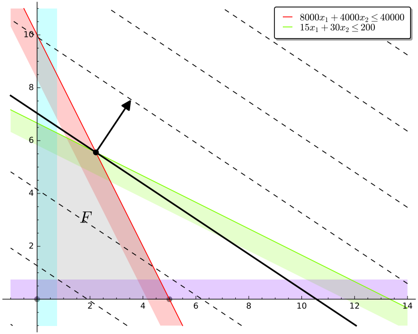
Entre : x_2. Sort : x_4.

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & = & \frac{20}{9} & - & \frac{1}{6000}x_3 & + & \frac{1}{45}x_4 \\
x_2 & = & \frac{50}{9} & + & \frac{1}{12000}x_3 & - & \frac{2}{45}x_4 \\
\hline
z & = & \frac{9500}{9} & - & \frac{1}{240}x_3 & - & \frac{40}{9}x_4
\end{array}$$

Solution optimale : $z = \frac{9500}{9} \approx 1055.55$, avec $(x_1, x_2) = \left(\frac{20}{9}, \frac{50}{9}\right) \simeq (2.22, 5.56)$

Simplexe

$$\begin{array}{llllllll}
\text{maximiser :} & 100x_1 & + & 150x_2 & & & & \\
\text{tel que :} & 8000x_1 & + & 4000x_2 & + \; x_3 & & = & 40000 \\
 & 15x_1 & + & 30x_2 & & + \; x_4 & = & 200 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$



$$\begin{array}{rclclcl}
x_3 & = & 40000 & - & 8000x_1 & - & 4000x_2 \\
x_4 & = & 200 & - & 15x_1 & - & 30x_2 \\
\hline
z & = & 0 & + & 100x_1 & + & 150x_2
\end{array}$$

Entre : x_1. Sort : x_3.

$$\begin{array}{rclclcl}
x_1 & = & 5 & - & \frac{1}{8000}x_3 & - & \frac{1}{2}x_2 \\
x_4 & = & 125 & + & \frac{3}{1600}x_3 & - & \frac{45}{2}x_2 \\
\hline
z & = & 500 & - & \frac{1}{80}x_3 & + & 100x_2
\end{array}$$

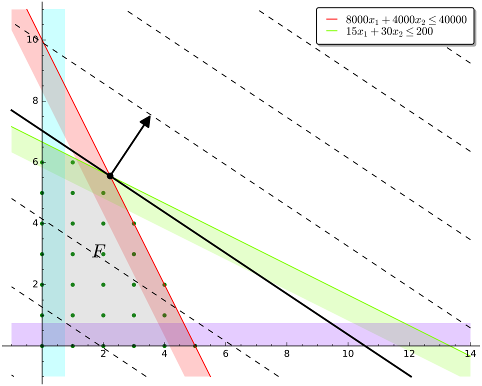
Entre : x_2. Sort : x_4.

$$\begin{array}{rclclcl}
x_1 & = & \frac{20}{9} & - & \frac{1}{6000}x_3 & + & \frac{1}{45}x_4 \\
x_2 & = & \frac{50}{9} & + & \frac{1}{12000}x_3 & - & \frac{2}{45}x_4 \\
\hline
z & = & \frac{9500}{9} & - & \frac{1}{240}x_3 & - & \frac{40}{9}x_4
\end{array}$$

Solution optimale : $z = \frac{9500}{9} \approx 1055.55$, avec $(x_1, x_2) = \left(\frac{20}{9}, \frac{50}{9}\right) \simeq (2.22, 5.56)$

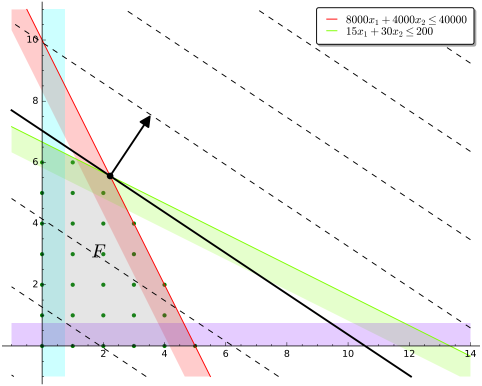
Mince : solution non entière ! → On ne peut pas acheter 2.22 presses et 5.56 tours.

Solution non entière : que faire ?



Solution optimale : $z = \frac{9500}{9} \approx 1055.55$, avec $(x_1, x_2) = \left(\frac{20}{9}, \frac{50}{9}\right) \approx (2.22, 5.56)$

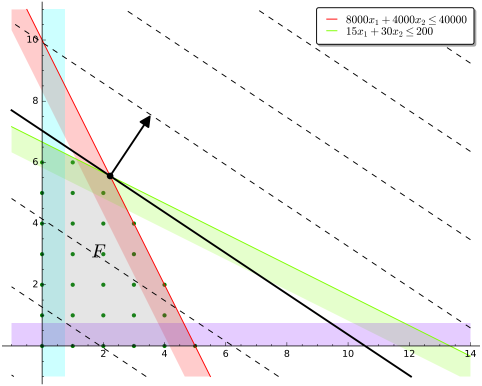
Solution non entière : que faire ?



Solution optimale : $z = \frac{9500}{9} \approx 1055.55$, avec $(x_1, x_2) = \left(\frac{20}{9}, \frac{50}{9}\right) \approx (2.22, 5.56)$

Si on arrondit vers le bas la solution : on obtient $(2, 5)$ et $z = 950$.

Solution non entière : que faire ?



Solution optimale : $z = \frac{9500}{9} \approx 1055.55$, avec $(x_1, x_2) = \left(\frac{20}{9}, \frac{50}{9}\right) \approx (2.22, 5.56)$

Si on arrondit vers le bas la solution : on obtient $(2, 5)$ et $z = 950$.

Autres solutions entières :

$$(3, 4) \text{ avec } z = 900$$
$$(0, 6) \text{ avec } z = 900$$
$$(1, 6) \text{ avec } z = 1000$$

Comment faire en général ?

- Dans notre petit exemple, il y a un petit nombre de combinaisons possibles, on pourrait juste les énumérer et calculer celle qui est la plus intéressante.

- Impossible en pratique : même si les variables sont à valeur dans $\{0, 1\}$ pour x, on aurait 2^x cas à regarder.
  (Estimation du nombre de protons dans l'univers : $10^{80} < 2^{266}$ — nombre d'Eddington)

Comment faire en général ?

- Dans notre petit exemple, il y a un petit nombre de combinaisons possibles, on pourrait juste les énumérer et calculer celle qui est la plus intéressante.
- Impossible en pratique : même si les variables sont à valeur dans $\{0, 1\}$ pour x, on aurait 2^x cas à regarder.
  (Estimation du nombre de protons dans l'univers : $10^{80} < 2^{266}$ — nombre d'Eddington)

Idée : On va couper l'espace de recherche en petit bouts

On choisit une variable x non-entière dans la solution. On regarde les 2 problèmes produits en forçant x à prendre soit une valeur inférieure, soit une valeur supérieure (brancher), et on réitère.

Brancher

problème initial

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{maximiser :} & 100x_1 & + & 150x_2 & & \\ & 8000x_1 & + & 4000x_2 & \leq & 40000 \\ & 15x_1 & + & 30x_2 & \leq & 200 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

solution optimale pas entière $\bar{x} = (\frac{20}{9}, \frac{50}{9}) \simeq (2.22, 5.56)$

branche gauche

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{maximiser :} & 100x_1 & + & 150x_2 & & \\ \text{tel que :} & 8000x_1 & + & 4000x_2 & \leq & 40000 \\ & 15x_1 & + & 30x_2 & \leq & 200 \\ & & & x_2 & \leq & 5 \end{array}$$

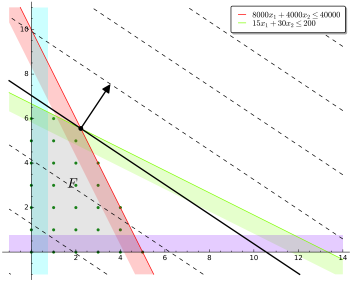
$x_1, x_2 \geq 0$

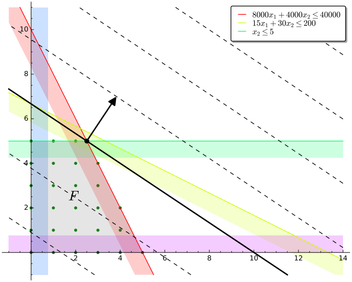
branche droite

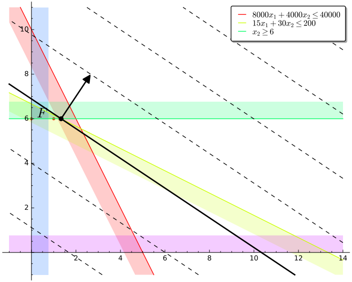
$$\begin{array}{lrcrcl} \text{maximiser :} & 100x_1 & + & 150x_2 & & \\ & 8000x_1 & + & 4000x_2 & \leq & 40000 \\ & 15x_1 & + & 30x_2 & \leq & 200 \\ & & & x_2 & \geq & 6 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

Brancher (graphiquement)







Borner

problème initial

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{maximiser :} & 100x_1 & + & 150x_2 & & \\ & 8000x_1 & + & 4000x_2 & \leq & 40000 \\ & 15x_1 & + & 30x_2 & \leq & 200 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & & & & \end{array}$$

branche gauche

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{maximiser :} & 100x_1 & + & 150x_2 & & \\ & 8000x_1 & + & 4000x_2 & \leq & 40000 \\ & 15x_1 & + & 30x_2 & \leq & 200 \\ & & & x_2 & \leq & 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & & & & \end{array}$$

$z^* = 1000$

branche droite

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{maximiser :} & 100x_1 & + & 150x_2 & & \\ & 8000x_1 & + & 4000x_2 & \leq & 40000 \\ & 15x_1 & + & 30x_2 & \leq & 200 \\ & & & x_2 & \geq & 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & & & & \end{array}$$

$z^* = \frac{3100}{3} \approx 1033$

Brancher et Borner (Branch and Bound)

Exploration d'un arbre

- On découvre des branches en ajoutant de nouvelles contraintes pour une variable (au dessus/ en dessous d'une valeur non entière dans la solution précédente).
- Borne inf au cours du temps : meilleur z d'une solution entière rencontrée.
- Borne sup (à un noeud) : $z*$ pour le problème de ce noeud (problème relâché puisque pas forcément une solution entière).
- On ignore définitivement une branche si elle n'a pas de solution, ou bien si la borne sup associée est plus basse que la borne inf.
- On peut s'arrêter si on trouve une solution entière optimale à un noeud qui a un $z*$ plus grand ou égal que toutes les bornes sups des autres noeuds.

Note historique

La méthode “branch and bound” est développée en 1960 par deux chercheuses à Londres, Alison Harcourt (née Doig) et Ailsa Land (née Dicken).

Alison G. Harcourt

Ailsa H. Land