Florent Foucaud

TD1 : Introduction à la Programmation Linéaire

Exercice 1 (Production de vin, G. Finke)**.**

Dans une winery nord-américaine on produit trois sortes de vins français authentiques : Bordeaux sweet, Rhône regular et Saint-Pourçain extra dry. Les produits de base, la main d'œuvre et le profit par gallon sont indiqués dans le tableau ci-dessous.
(Note culturelle : aux USA 1 boisseau (bushel) $\approx 35L$, 1 gallon $\approx 3.8L$, 1 livre (pound) $\approx 453g$)

	merlot (boisseaux)	cabernet-sauvignon (boisseaux)	sucre (livres)	main d'œuvre (heures)	profit ($/gallon)
Bordeaux sweet	1	1	2	2	10
Rhône regular	2	0	1	3	12
Saint-Pourçain extra dry	0	2	0	1	20

La winery a un stock de 150 boisseaux de raisin merlot, 150 boisseaux de raisin cabernet-sauvignon, 80 livres de sucre et peut fournir 225 heures de travail. On veut déterminer les quantités des trois types de vin à produire afin de maximiser le profit.

Modéliser ce problème par un programme linéaire (définir les variables, la fonction objectif, les contraintes).

Exercice 2 (Résolution graphique, J.-F. Hêche)**.**

Soit le programme linéaire :

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcr} \text{maximiser} & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{tel que} & x_1 & - & x_2 & \geq & -2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}}$$

(a) Représenter graphiquement l'espace de solutions.
(b) Trouver la solution optimale.

Exercice 3 (Cultiver son jardin, N. Brauner)**.**

Josette cultive des courgettes et des navets et elle souhaite maximiser le poids total des légumes cultivés pour espérer gagner cette année le concours local des jardiniers amateurs. Pour cela, elle doit utiliser de l'engrais et des anti-parasites. Elle a droit à $8L$ d'engrais A, 7L d'engrais B, et 3L d'anti-parasites.

- Pour cultiver $1m^2$ de courgettes, il faut $2L$ d'engrais A et $1L$ d'engrais B.
- Pour cultiver $1m^2$ de navets, il faut $1L$ d'engrais A, $2L$ d'engrais B et $1L$ d'anti-parasites.

Par ailleurs, le rendement annuel des légumes est $4kg/m^2$ pour les courgettes et $5kg/m^2$ pour les navets.

(a) Modéliser ce problème sous forme de programme linéaire (définir les variables, la fonction objectif, les contraintes).
(b) Représenter graphiquement l'espace de solutions.
(c) Trouver la solution optimale.

Exercice 4 (Publicité, N. Brauner)**.**

Une entreprise dispose d'un budget publicitaire de 4800€ pour le lancement de son nouveau produit. Sa campagne publicitaire utilisera à la fois des spots télévisés sur TV8 Clermont-Ferrand et des pages dans La Montagne. On pense que chaque minute de télévision va atteindre 100 000 nouveaux spectateurs et chaque page dans un journal va être lue par 80 000 nouveaux lecteurs. Une minute de télévision coûte 800€ et une page dans un journal 600€. La direction de l'entreprise souhaite diffuser au moins trois minutes de spot et une page de journal. Son objectif est de maximiser le nombre total de cibles (spectateurs et lecteurs).

(a) Modéliser ce problème par un programme linéaire.
(b) Représenter l'espace des solutions réalisables.
(c) Quelle est la combinaison optimale si le budget est augmenté de 4800€ à 6000€ ?
(d) Quelle est la décision optimale s'il n'y a pas de contrainte de temps de télévision ?

Exercice 5 (Abstraction à deux variables, L. Beaudou)**.**

Considérons le programme linéaire suivant sur les variables x, y (où on remplace s et t par des nombres de notre choix) :

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcl} \text{maximiser} & x & + & y & & \\ \text{tel que} & sx & + & ty & \leq & 1 \\ & x & & & \geq & 0 \\ & & & y & \geq & 0 \end{array}}$$

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres s et t pour que ce programme linéaire :
(a) ait au moins une solution.
(b) soit irréalisable (pas de solution).
(c) soit non-borné (une infinité de solutions, aucune n'est optimale).