Recherche opérationnelle

DUT Info 2e année, parcours A

Programmation linéaire : l'algo du simplexe en détails

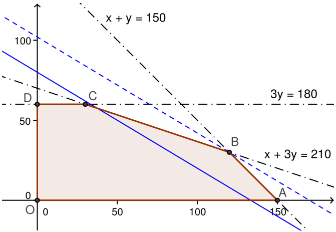
Florent Foucaud

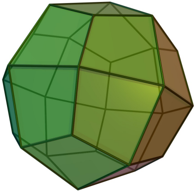
IUT CLERMONT AUVERGNE
Aurillac - Clermont-Ferrand - Le Puy-en-Velay
Montluçon - Moulins - Vichy

L'algo du simplexe (1947-1952) : principe

Principe général :

0. On part d'un PL en forme standard
1. On trouve une solution non-optimale en un point du polytope associé à notre PL
2. Tant qu'on peut, on évolue vers une solution proche qui améliore la fonction objectif
   (si on ne peut plus améliorer la solution courante, on s'arrête : on a trouvé une solution optimale !)



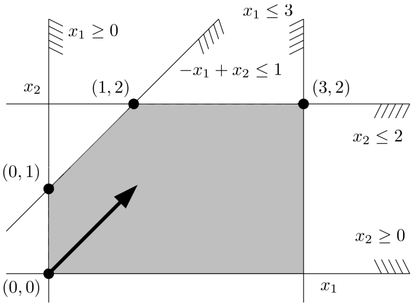


George B. Dantzig

(1914-2005)

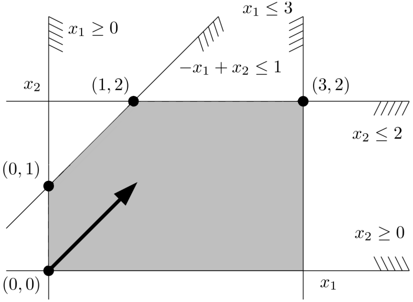
L'algo sur un exemple

$$\begin{array}{lrcrcc}
\text{maximiser :} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{tel que :} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$



L'algo sur un exemple

$$\begin{array}{llllll} \text{maximiser :} & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{tel que :} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

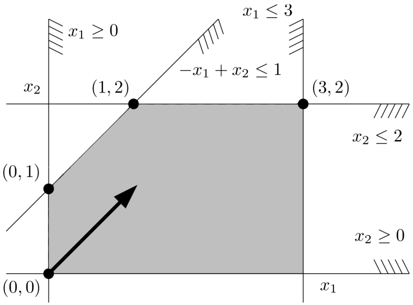


On passe le PL en forme standard via des variables d'écart x_3, x_4, x_5 :

$$\begin{array}{llllllllllll} \text{maximiser :} & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\ \text{tel que :} & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\ & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\ & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\ & x_1 & & & & & & & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & & & & & & & \geq & 0 \\ & & & & & x_3 & & & & & \geq & 0 \\ & & & & & & & x_4 & & & \geq & 0 \\ & & & & & & & & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

L'algo sur un exemple

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{tel que :} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
& x_1 & & & \leq & 3 \\
& & & x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$



On passe le PL en forme standard via des variables d'écart x_3, x_4, x_5 :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{maximiser :} & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{tel que :} & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
& x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
& & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
& x_1 & & & & & & & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & & & & & & & \geq & 0 \\
& & & & & x_3 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & & & & x_4 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & & & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

On voit que $x_1 = x_2 = 0$ est une solution (non-optimale) du PL originel.

$\rightarrow$ Cela implique $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, $x_5 = 2$ dans le nouveau PL : solution $(0, 0, 1, 3, 2)$.

Une première solution

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\text{maximiser} & z = & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{tel que :} & & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Une première solution

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\text{maximiser} & z & = & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{tel que :} & & & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\
 & & & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{|lclclcl|}
\hline
x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\
\hline
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
\hline
x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & x_2 \\
\hline
\end{array}$$

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On démarre avec notre solution basique $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, $x_5 = 2$.
Les variables non-nulles x_3, x_4, x_5 sont appelées basiques.

On réécrit le PL sous forme d'un tableau de simplexe.

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

Par exemple, si on prend $x_2 = 1$, on obtient $z = 1$.
Si on prend $x_2 = 2$, on obtient $z = 2$, c'est encore mieux.

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

Par exemple, si on prend $x_2 = 1$, on obtient $z = 1$.
Si on prend $x_2 = 2$, on obtient $z = 2$, c'est encore mieux.

Par contre, on aurait alors $x_3 = 1 + 0 - 2 < 0$ ce qui n'est pas autorisé....

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

$x_3 = 1 + x_1 - x_2 \geq 0$ donc $1 - x_2 \geq 0$ et $1 \geq x_2$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

$x_3 = 1 + x_1 - x_2 \geq 0$ donc $1 - x_2 \geq 0$ et $1 \geq x_2$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_2

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

$x_3 = 1 + x_1 - x_2 \geq 0$ donc $1 - x_2 \geq 0$ et $1 \geq x_2$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_2

$x_5 = 2 - x_2 \geq 0$ donc $2 - x_2 \geq 0$ et $2 \geq x_2$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

$x_3 = 1 + x_1 - x_2 \geq 0$ donc $1 - x_2 \geq 0$ et $1 \geq x_2$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_2

$x_5 = 2 - x_2 \geq 0$ donc $2 - x_2 \geq 0$ et $2 \geq x_2$

On augmente x_2 au maximum autorisé : $x_2 = 1$, et on garde $x_1 = 0$.

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

On veut améliorer la solution en augmentant une seule variable qui était à 0.

On peut choisir x_1 ou x_2 : prenons x_2. C'est le **pivot**.

De combien peut-on augmenter x_2 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_1 = 0$) :

$x_3 = 1 + x_1 - x_2 \geq 0$ donc $1 - x_2 \geq 0$ et $1 \geq x_2$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_2

$x_5 = 2 - x_2 \geq 0$ donc $2 - x_2 \geq 0$ et $2 \geq x_2$

On augmente x_2 au maximum autorisé : $x_2 = 1$, et on garde $x_1 = 0$.

On calcule x_3, x_4 et x_5 grâce au tableau : $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $x_5 = 1$

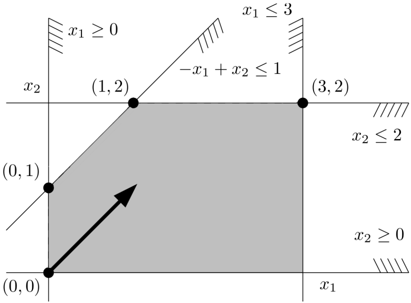
Nouvelle solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$ qui donne $z = 1$.

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

Nouvelle solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$ qui donne $z = 1$.



Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

Nouvelle solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$ qui donne $z = 1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

Nouvelle solution : $(0,1,0,3,1)$ qui donne $z=1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

Nouvelle solution : $(0,1,0,3,1)$ qui donne $z=1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$

$x_4 = 3 - x_1$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

Nouvelle solution : $(0,1,0,3,1)$ qui donne $z=1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$

$x_4 = 3 - x_1$

$x_5 = 2 - x_2 = 2 - (1 + x_1 - x_3) = 1 - x_1 + x_3$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

Nouvelle solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$ qui donne $z = 1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$

$x_4 = 3 - x_1$

$x_5 = 2 - x_2 = 2 - (1 + x_1 - x_3) = 1 - x_1 + x_3$

$z = x_1 + x_2 = x_1 + (1 + x_1 - x_3) = 1 + 2x_1 - x_3$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Nouvelle solution : $(0,1,0,3,1)$ qui donne $z=1$.

x_2 est maintenant une variable basique, mais plus x_3 ! On réécrit le tableau :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3$

$x_4 = 3 - x_1$

$x_5 = 2 - x_2 = 2 - (1 + x_1 - x_3) = 1 - x_1 + x_3$

$z = x_1 + x_2 = x_1 + (1 + x_1 - x_3) = 1 + 2x_1 - x_3$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3=0$) :

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3 = 0$) :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 \geq 0$ donc $1 + x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq -1$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3 = 0$) :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 \geq 0$ donc $1 + x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq -1$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0$ donc $3 \geq x_1$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3 = 0$) :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 \geq 0$ donc $1 + x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq -1$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0$ donc $3 \geq x_1$

$x_5 = 1 - x_1 + x_3 \geq 0$ donc $1 - x_1 \geq 0$ et $1 \geq x_1$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3 = 0$) :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 \geq 0$ donc $1 + x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq -1$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0$ donc $3 \geq x_1$

$x_5 = 1 - x_1 + x_3 \geq 0$ donc $1 - x_1 \geq 0$ et $1 \geq x_1$

On augmente x_1 au maximum autorisé : $x_1 = 1$, et on garde $x_3 = 0$.

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_1, car x_3 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_1 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_3 = 0$) :

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 \geq 0$ donc $1 + x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq -1$

$x_4 = 3 - x_1 \geq 0$ donc $3 \geq x_1$

$x_5 = 1 - x_1 + x_3 \geq 0$ donc $1 - x_1 \geq 0$ et $1 \geq x_1$

On augmente x_1 au maximum autorisé : $x_1 = 1$, et on garde $x_3 = 0$.

On calcule x_2, x_4 et x_5 grâce au tableau : $x_2 = 2$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$

Nouvelle solution : $(1,2,0,2,0)$ qui donne $z = 3$.

Une première solution

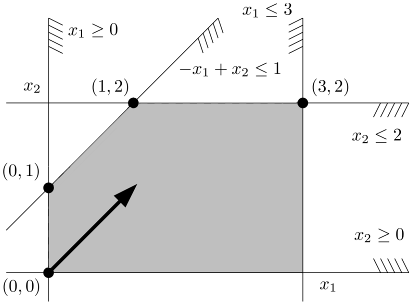
x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Nouvelle solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$ qui donne $z = 3$.



Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Nouvelle solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$ qui donne $z = 3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Nouvelle solution : $(1,2,0,2,0)$ qui donne $z=3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Nouvelle solution : $(1,2,0,2,0)$ qui donne $z=3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

$$x_1 = 1 + x_3 - x_5$$
$$x_2 = 1 + x_1 - x_3 = 1 + (1 + x_3 - x_5) - x_3 = 2 + x_5$$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Nouvelle solution : $(1,2,0,2,0)$ qui donne $z=3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5$

$x_2 = 1 + x_1 - x_3 = 1 + (1 + x_3 - x_5) - x_3 = 2 + x_5$

$x_4 = 3 - x_1 = 3 - (1 + x_3 - x_5) = 2 - x_3 + x_5$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

Nouvelle solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$ qui donne $z = 3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

$$x_1 = 1 + x_3 - x_5$$
$$x_2 = 1 + x_1 - x_3 = 1 + (1 + x_3 - x_5) - x_3 = 2 + x_5$$
$$x_4 = 3 - x_1 = 3 - (1 + x_3 - x_5) = 2 - x_3 + x_5$$
$$z = 1 + 2x_1 - x_3 = 1 + 2(1 + x_3 - x_5) - x_3 = 3 + x_3 - 2x_5$$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

Nouvelle solution : $(1,2,0,2,0)$ qui donne $z=3$.

x_1 est maintenant une variable basique, mais plus x_5 ! On réécrit le tableau :

$$x_1 = 1 + x_3 - x_5$$
$$x_2 = 1 + x_1 - x_3 = 1 + (1 + x_3 - x_5) - x_3 = 2 + x_5$$
$$x_4 = 3 - x_1 = 3 - (1 + x_3 - x_5) = 2 - x_3 + x_5$$
$$z = 1 + 2x_1 - x_3 = 1 + 2(1 + x_3 - x_5) - x_3 = 3 + x_3 - 2x_5$$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Quel **pivot** choisir ? $\longrightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

Une première solution

$$
\begin{array}{|cccccccc|}
\hline
x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\
\hline
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
\hline
x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & x_2 \\
\hline
\end{array}
$$

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z = 0$

$$
\begin{array}{|cccccccc|}
\hline
x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & x_3 \\
\hline
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\
\hline
x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 \\
\hline
z & = & 1 & + & 2x_1 & - & x_3 \\
\hline
\end{array}
$$

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z = 1$

$$
\begin{array}{|cccccccc|}
\hline
x_1 & = & 1 & + & x_3 & - & x_5 \\
\hline
x_2 & = & 2 & & & + & x_5 \\
\hline
x_4 & = & 2 & - & x_3 & + & x_5 \\
\hline
z & = & 3 & + & x_3 & - & 2x_5 \\
\hline
\end{array}
$$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z = 3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5 = 0$) :

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5 = 0$) :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 \geq 0$ donc $1 + x_3 \geq 0$ et $x_3 \geq -1$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5=0$) :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 \geq 0$ donc $1 + x_3 \geq 0$ et $x_3 \geq -1$
$x_2 = 2 + x_5 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_3

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5 = 0$) :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 \geq 0$ donc $1 + x_3 \geq 0$ et $x_3 \geq -1$
$x_2 = 2 + x_5 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_3
$x_4 = 2 - x_3 + x_5 \geq 0$ donc $2 - x_3 \geq 0$ et $2 \geq x_3$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5 = 0$) :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 \geq 0$ donc $1 + x_3 \geq 0$ et $x_3 \geq -1$
$x_2 = 2 + x_5 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_3
$x_4 = 2 - x_3 + x_5 \geq 0$ donc $2 - x_3 \geq 0$ et $2 \geq x_3$

On augmente x_3 au maximum autorisé : $x_3 = 2$, et on garde $x_5 = 0$.

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Quel **pivot** choisir ? $\rightarrow$ x_3, car x_5 ferait baisser la fonction objectif.

De combien peut-on augmenter x_3 ?

Regardons nos contraintes (avec $x_5 = 0$) :

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 \geq 0$ donc $1 + x_3 \geq 0$ et $x_3 \geq -1$
$x_2 = 2 + x_5 \geq 0 \rightarrow$ aucune influence sur x_3
$x_4 = 2 - x_3 + x_5 \geq 0$ donc $2 - x_3 \geq 0$ et $2 \geq x_3$

On augmente x_3 au maximum autorisé : $x_3 = 2$, et on garde $x_5 = 0$.

On calcule x_1, x_2 et x_4 grâce au tableau : $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_4 = 0$

Nouvelle solution : $(3,2,2,0,0)$ qui donne $z = 5$.

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

Nouvelle solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$ qui donne $z = 5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Nouvelle solution : $(3,2,2,0,0)$ qui donne $z=5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Nouvelle solution : $(3,2,2,0,0)$ qui donne $z=5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 = 1 + (2 - x_4 + x_5) - x_5 = 3 - x_4$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Nouvelle solution : $(3,2,2,0,0)$ qui donne $z=5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 = 1 + (2 - x_4 + x_5) - x_5 = 3 - x_4$

$x_2 = 2 - x_5$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0,0,1,3,2)$, $z=0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0,1,0,3,1)$, $z=1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1,2,0,2,0)$, $z=3$

Nouvelle solution : $(3,2,2,0,0)$ qui donne $z=5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 = 1 + (2 - x_4 + x_5) - x_5 = 3 - x_4$

$x_2 = 2 - x_5$

$z = 3 + x_3 - 2x_5 = 3 + (2 - x_4 + x_5) - 2x_5 = 5 - x_4 - x_5$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

x_3	$=$	2	$-$	x_4	$+$	x_5
x_1	$=$	3	$-$	x_4		
x_2	$=$	2			$+$	x_5
z	$=$	5	$-$	x_4	$-$	x_5

Solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$, $z = 5$

Nouvelle solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$ qui donne $z = 5$.

x_3 est maintenant une variable basique, mais plus x_4 ! On réécrit le tableau :

$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

$x_1 = 1 + x_3 - x_5 = 1 + (2 - x_4 + x_5) - x_5 = 3 - x_4$

$x_2 = 2 - x_5$

$z = 3 + x_3 - 2x_5 = 3 + (2 - x_4 + x_5) - 2x_5 = 5 - x_4 - x_5$

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

x_3	$=$	2	$-$	x_4	$+$	x_5
x_1	$=$	3	$-$	x_4		
x_2	$=$	2			$+$	x_5
z	$=$	5	$-$	x_4	$-$	x_5

Solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$, $z = 5$

Une première solution

$$\begin{array}{|lccccccc|}\hline x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\ \hline x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\ \hline x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\ \hline z & = & & & x_1 & + & x_2 \\ \hline \end{array}$$

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

$$\begin{array}{|lccccccc|}\hline x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & x_3 \\ \hline x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\ \hline x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 \\ \hline z & = & 1 & + & 2x_1 & - & x_3 \\ \hline \end{array}$$

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

$$\begin{array}{|lccccccc|}\hline x_1 & = & 1 & + & x_3 & - & x_5 \\ \hline x_2 & = & 2 & & & + & x_5 \\ \hline x_4 & = & 2 & - & x_3 & + & x_5 \\ \hline z & = & 3 & + & x_3 & - & 2x_5 \\ \hline \end{array}$$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

$$\begin{array}{|lccccccc|}\hline x_3 & = & 2 & - & x_4 & + & x_5 \\ \hline x_1 & = & 3 & - & x_4 & & \\ \hline x_2 & = & 2 & & & + & x_5 \\ \hline z & = & 5 & - & x_4 & - & x_5 \\ \hline \end{array}$$

Solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$, $z = 5$

Quel **pivot** choisir ?

Une première solution

$$\begin{array}{|lllllll|}\hline x_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\ \hline x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\ \hline x_5 & = & 2 & & & - & x_2 \\ \hline z & = & & & x_1 & + & x_2 \\ \hline \end{array}$$

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

$$\begin{array}{|lllllll|}\hline x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & x_3 \\ \hline x_4 & = & 3 & - & x_1 & & \\ \hline x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 \\ \hline z & = & 1 & + & 2x_1 & - & x_3 \\ \hline \end{array}$$

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

$$\begin{array}{|lllllll|}\hline x_1 & = & 1 & + & x_3 & - & x_5 \\ \hline x_2 & = & 2 & & & + & x_5 \\ \hline x_4 & = & 2 & - & x_3 & + & x_5 \\ \hline z & = & 3 & + & x_3 & - & 2x_5 \\ \hline \end{array}$$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

$$\begin{array}{|lllllll|}\hline x_3 & = & 2 & - & x_4 & + & x_5 \\ \hline x_1 & = & 3 & - & x_4 & & \\ \hline x_2 & = & 2 & & & + & x_5 \\ \hline z & = & 5 & - & x_4 & - & x_5 \\ \hline \end{array}$$

Solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$, $z = 5$

Quel **pivot** choisir ?

Aucun, car on baisserait la valeur de la fonction objectif.

L'algorithme est terminé !

La solution optimale est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 2, 2, 0, 0)$ avec $z = 5$.

Une première solution

x_3	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_2
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	2			$-$	x_2
z	$=$			x_1	$+$	x_2

Solution : $(0, 0, 1, 3, 2)$, $z = 0$

x_2	$=$	1	$+$	x_1	$-$	x_3
x_4	$=$	3	$-$	x_1		
x_5	$=$	1	$-$	x_1	$+$	x_3
z	$=$	1	$+$	$2x_1$	$-$	x_3

Solution : $(0, 1, 0, 3, 1)$, $z = 1$

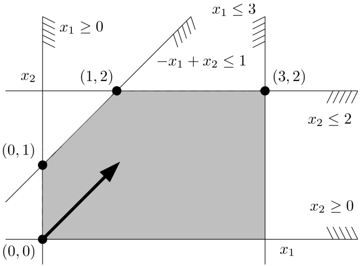
x_1	$=$	1	$+$	x_3	$-$	x_5
x_2	$=$	2			$+$	x_5
x_4	$=$	2	$-$	x_3	$+$	x_5
z	$=$	3	$+$	x_3	$-$	$2x_5$

Solution : $(1, 2, 0, 2, 0)$, $z = 3$

x_3	$=$	2	$-$	x_4	$+$	x_5
x_1	$=$	3	$-$	x_4		
x_2	$=$	2			$+$	x_5
z	$=$	5	$-$	x_4	$-$	x_5

Solution : $(3, 2, 2, 0, 0)$, $z = 5$

La solution optimale est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 2, 2, 0, 0)$ avec $z = 5$.



Résumé de l'algorithme

0. On part d'un PL en forme standard
1. On trouve une solution non-optimale en un point du polytope associé à notre PL
2. Tant qu'on peut, on évolue vers une solution proche qui améliore la fonction objectif. On réitère :

   a. Déterminer les variables basiques (non-nulles dans la solution courante)

   b. Écrire le tableau de simplexe qui exprime les variables basiques et la fonction objectif z en fonction des variables non-basiques

   c. Trouver une variable non-basique à augmenter pour augmenter z : c'est le pivot

   d. Si aucun pivot n'existe (on ne peut plus augmenter z), on a trouvé la solution optimale ! STOP

   e. Sinon, l'augmenter au maximum possible en fonction des contraintes de type $x_i \geq 0$ avec x_i les variables basiques
   (s'il n'y a pas de restriction sur le pivot, le PL est non borné : STOP)

   f. Calculer les nouvelles valeurs des variables : on obtient une nouvelle solution.

Détail techniques délicat : l'initialisation

- Trouver la solution initiale n'est pas forcément facile !

Détail techniques délicat : l'initialisation

- Trouver la solution initiale n'est pas forcément facile !

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{maximiser :} & & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{tel que :} & & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\
 & & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1 \\
\end{array}
$$

$x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Détail techniques délicat : l'initialisation

- Trouver la solution initiale n'est pas forcément facile !

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{maximiser :} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{tel que :} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1
\end{array}$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$(0, 0, 0)$ n'est pas une solution !

Détail techniques délicat : l'initialisation

- Trouver la solution initiale n'est pas forcément facile !

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{maximiser :} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{tel que :} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1
\end{array}
$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$(0, 0, 0)$ n'est pas une solution !

PL auxiliaire :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{maximiser :} & -x_0 & & & & & & & & \\
\text{tel que :} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_0 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_0 & \leq & -5 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_0 & \leq & -1
\end{array}
$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Détail techniques délicat : l'initialisation

- Trouver la solution initiale n'est pas forcément facile !

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{maximiser :} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{tel que :} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1
\end{array}$$

$x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$(0, 0, 0)$ n'est pas une solution !

PL auxiliaire :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{maximiser :} & -x_0 & & & & & & & & \\
\text{tel que :} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_0 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_0 & \leq & -5 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_0 & \leq & -1
\end{array}$$

$x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0$

On a la solution $(5, 0, 0, 0)$

Détail techniques délicat : l'initialisation

- Trouver la solution initiale n'est pas forcément facile !

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{maximiser :} & & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{tel que :} & & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\
& & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1
\end{array}$$

$x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$(0, 0, 0)$ n'est pas une solution !

PL auxiliaire :

$$\begin{array}{llrcrcrcrcr}
\text{maximiser :} & & -x_0 & & & & & & & & \\
\text{tel que :} & & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_0 & \leq & 4 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_0 & \leq & -5 \\
& & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_0 & \leq & -1
\end{array}$$

$x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0$

On a la solution $(5, 0, 0, 0)$

Proposition

Le PL originel a une solution si et seulement si le PL auxiliaire a une solution optimale (avec $x_0 = 0$).

Détail techniques délicat : la terminaison

- Il faut éviter de boucler en cours de route

Détail techniques délicat : la terminaison

- Il faut éviter de boucler en cours de route

On a parfois le choix entre plusieurs pivots. Il faut une règle pour les départager.

Détail techniques délicat : la terminaison

- Il faut éviter de boucler en cours de route

On a parfois le choix entre plusieurs pivots. Il faut une règle pour les départager.

Hélas, la plupart des règles peuvent créer des cycles sans fin !
→ L'algo ne termine pas...

Détail techniques délicat : la terminaison

- Il faut éviter de boucler en cours de route

On a parfois le choix entre plusieurs pivots. Il faut une règle pour les départager.

Hélas, la plupart des règles peuvent créer des cycles sans fin !

→ L'algo ne termine pas...

Théorème (Bland, 1977)

Si on choisit toujours comme pivot et comme variable sortante (si plusieurs choix possible) la variable avec le plus petit indice, on ne boucle pas.

Robert G. Bland

(1948-)

Pourquoi le nom ”simplexe” ?

Un simplexe dans un espace à n dimensions, c’est le polytope le plus simple dans cet espace.

→ En 2D : triangle, en 3D : tétrahèdre, etc.

Pourquoi le nom "simplexe" ?

Un simplexe dans un espace à n dimensions, c'est le polytope le plus simple dans cet espace.

→ En 2D : triangle, en 3D : tétrahèdre, etc.

Interprétation géométrique de l'algorithme :

On est dans un espace à n dimensions, avec m variables basiques et $n-m$ variables non-basiques.

Pourquoi le nom ”simplexe” ?

Un simplexe dans un espace à n dimensions, c'est le polytope le plus simple dans cet espace.

→ En 2D : triangle, en 3D : tétrahèdre, etc.

Interprétation géométrique de l'algorithme :

On est dans un espace à n dimensions, avec m variables basiques et $n - m$ variables non-basiques.

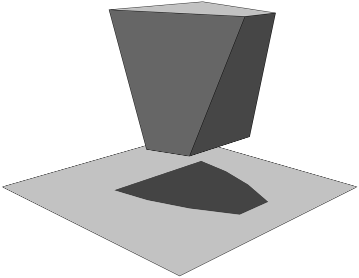
Les m variables basiques forment un simplexe en m dimensions.

Quand on pivote en changeant les valeurs de certaines variables, on trouve un nouveau simplexe en m dimensions.

Un mot sur la complexité de l'algo

En pratique, l'algo du simplexe est rapide : la plupart du temps, $\approx 3m$ étapes de pivot (pour m contraintes) suffisent.

MAIS il existe des cas pathologiques (construits par Klee et Minty en 1973) avec environ 2^m étapes de pivot : on doit visiter tous les sommets du polytope...



Le cube de Klee et Minty

Victor L. Klee Jr.

(1925-2007)

George J. Minty Jr.

(1929-1986)

Il existe maintenant des algorithmes plus rapides, mais plus compliqués :

$\longrightarrow$ exemple : la méthode des points intérieurs