Recherche opérationnelle

DUT Info 2e année, parcours A

Programmation linéaire en nombres entiers

Florent Foucaud

IUT CLERMONT AUVERGNE

Aurillac - Clermont-Ferrand - Le Puy-en-Velay
Montluçon - Moulins - Vichy

Solution pas entière ?

- Solution d'un PL : pas forcément des valeurs entières.

Solution pas entière ?

- Solution d'un PL : pas forcément des valeurs entières.
- Dans de nombreux contextes, nos variables doivent prendre une solution entière
  (exemple : nombre de machines, groupes pour l'emploi du temps, etc).

Solution pas entière ?

- Solution d'un PL : pas forcément des valeurs entières.
- Dans de nombreux contextes, nos variables doivent prendre une solution entière
  (exemple : nombre de machines, groupes pour l'emploi du temps, etc).
- Pour cela on va modéliser des programmes linéaires en nombres entiers (ou mixtes)

Exemple : presser ou tourner

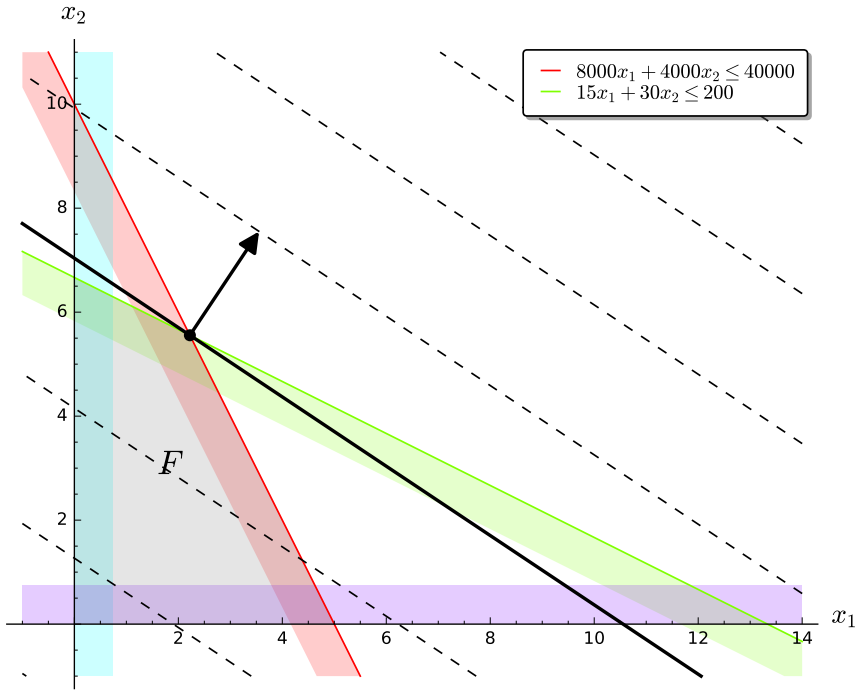
Exemple 1

Un start-upper dispose d'un budget de 40k€ pour équiper son atelier de 200m^2 avec des presses et des tours.

- Une presse coûte 8k€, un tour 4k€.
- Une presse prend 15 m^2, un tour prend 30 m^2.
- Profit journalier d'une presse : 100 €, celui d'un tour : 150 €.

Presser ou Tourner

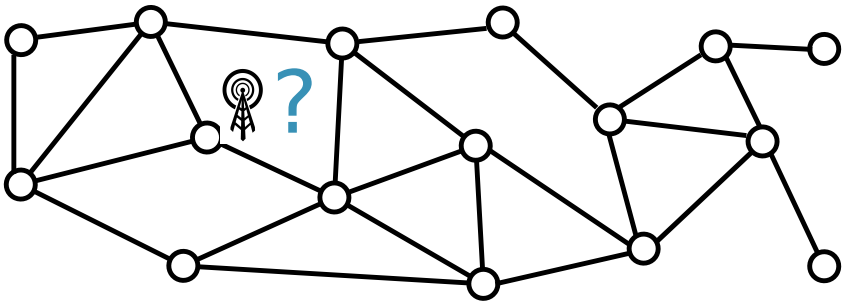
$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & 100x_1 & + & 150x_2 & & \\
\text{tel que :} & 8000x_1 & + & 4000x_2 & \leq & 40000 \\
 & 15x_1 & + & 30x_2 & \leq & 200 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



Couverture d’un réseau par des antennes

Problème : couvrir un réseau avec des antennes (*ensemble dominant*).

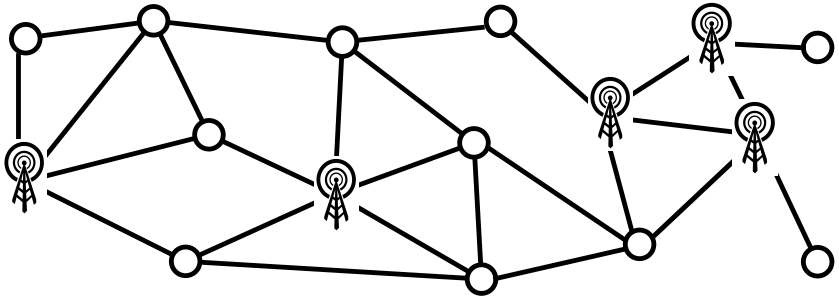
Objectif : minimiser le nombre d’antennes



Couverture d’un réseau par des antennes

Problème : couvrir un réseau avec des antennes (*ensemble dominant*).

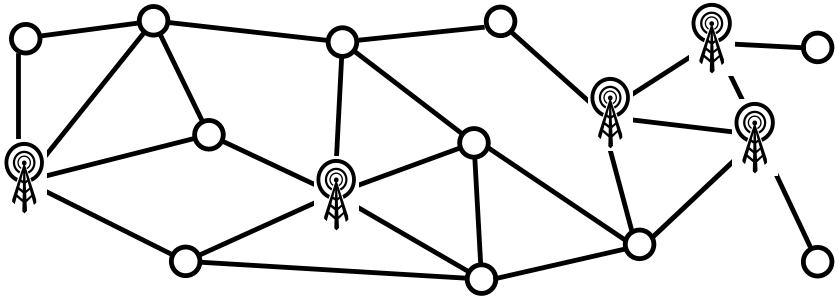
Objectif : minimiser le nombre d’antennes



Couverture d'un réseau par des antennes

Problème : couvrir un réseau avec des antennes (*ensemble dominant*).

Objectif : minimiser le nombre d'antennes



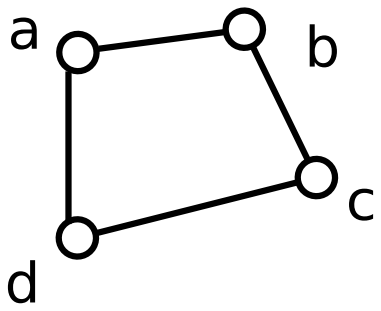
Le réseau est un graphe non-orienté $G = (V, E)$.

On écrit le PL en nombres entiers suivant :

Une variable x_v pour chaque sommet v : $x_v = 1$ si on a une antenne sur v, 0 sinon.

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimiser :} & \sum_{v \in V} x_v & & & \\
\text{tel que :} & \sum_{uv \in E} x_u + x_v & \geq & 1 & \forall v \in V \\
 & x_v & \leq & 1 & \forall v \in V \\
 & x_v & \geq & 0 & \forall v \in V \\
 & x_v & \in & \mathbb{N} & \forall v \in V
\end{array}
$$

Couverture d'un réseau par des antennes : exemple



Le réseau est un graphe non-orienté $G = (V, E)$, ici $V = \{a, b, c, d\}$ et $E = \{ab, bc, cd, de\}$.

On écrit le PL en nombres entiers suivant :

Une variable x_v pour chaque sommet v : $x_v = 1$ si on a une antenne sur v.

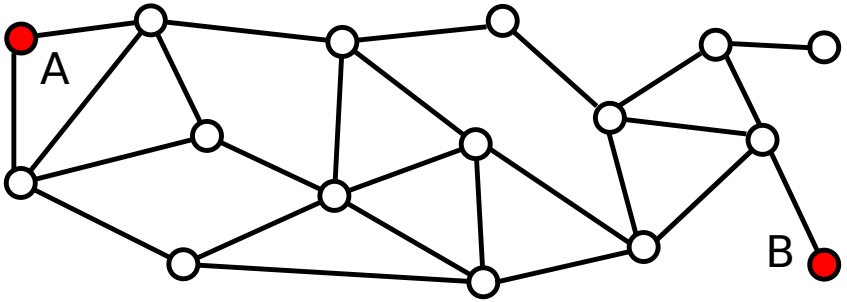
minimiser : $x_a + x_b + x_c + x_d$

tel que :

$$\begin{array}{lcll}
x_a + x_b + x_d & \geq & 1 & \textit{Sommet } a \\
x_b + x_c + x_a & \geq & 1 & \textit{Sommet } b \\
x_c + x_d + x_b & \geq & 1 & \textit{Sommet } c \\
x_d + x_c + x_a & \geq & 1 & \textit{Sommet } d \\
 & & & \\
x_a, x_b, x_c, x_d & \leq & 1 & \\
x_a, x_b, x_c, x_d & \geq & 0 & \\
x_a, x_b, x_c, x_d & \in & \mathbb{N} &
\end{array}$$

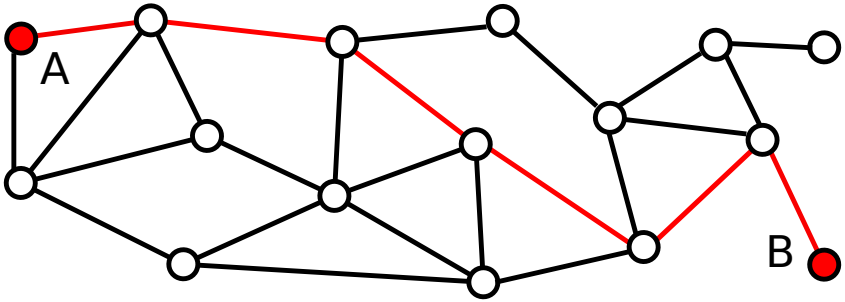
Plus court chemin

Problème : trouver un plus court chemin dans un réseau de A à B.



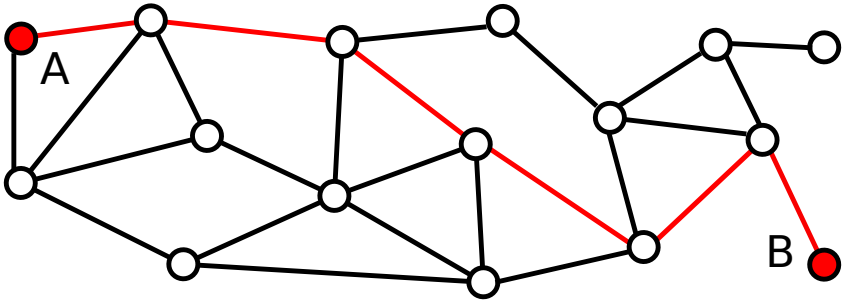
Plus court chemin

Problème : trouver un plus court chemin dans un réseau de A à B.



Plus court chemin

Problème : trouver un plus court chemin dans un réseau de A à B.



Le réseau est un graphe $G = (V, E)$.

On écrit le PL en nombres entiers suivant :

Une variable x_e pour chaque arête e : $x_e = 1$ si on sélectionne e, 0 sinon.

$$
\begin{array}{llcll}
\text{minimiser :} & \sum_{e \in E} x_e & & & \\
\text{tel que :} & \sum_{u:u \to v} x_{uv} & = & \sum_{w:v \to w} x_{vw} & \forall v \in V - \{A, B\} \\
 & \sum_{u:A \to u} x_{Au} & = & 1 & \\
 & \sum_{u:u \to B} x_{uB} & = & 1 & \\
 & x_e & \leq & 1 & \forall e \in E \\
 & x_e & \geq & 0 & \forall e \in E \\
 & x_e & \in & \mathbb{N} & \forall e \in E
\end{array}
$$