

Recherche opérationnelle

DUT Info 2e année, parcours A

Utiliser la relaxation linéaire d'un PLNE

Florent Foucaud



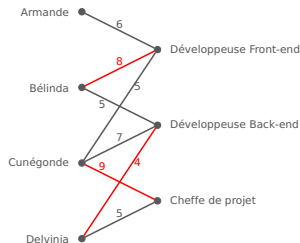
IUT CLERMONT AUVERGNE

Aurillac - Clermont-Ferrand - Le Puy-en-Velay
Montluçon - Moulins - Vichy

Couplage dans un graphe biparti

Problème : sélectionner un ensemble d'arêtes d'un **graphe biparti**, de telle façon que chaque sommet soit touché **au plus une fois**.

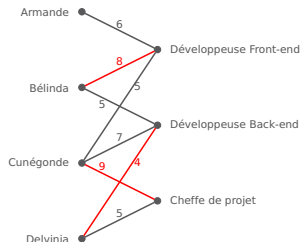
Objectif : **maximiser** le poids total du couplage



Couplage dans un graphe biparti

Problème : sélectionner un ensemble d'arêtes d'un **graphe biparti**, de telle façon que chaque sommet soit touché **au plus une fois**.

Objectif : **maximiser** le poids total du couplage



On écrit le PLNE suivant ($x_e = 1$ si l'arête e est sélectionnée, sinon $x_e = 0$) :

maximiser : $\sum_{e \in E} p_e x_e$

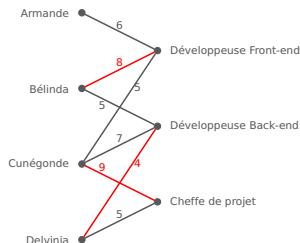
tel que :

$$\sum_{e=uv \in E} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V$$
$$x_e \leq 1 \quad \forall e \in E$$
$$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$$
$$x_e \in \mathbb{N} \quad \forall e \in E$$

Couplage dans un graphe biparti

Problème : sélectionner un ensemble d'arêtes d'un **graphe biparti**, de telle façon que chaque sommet soit touché **au plus une fois**.

Objectif : **maximiser** le poids total du couplage



On écrit le PLNE suivant ($x_e = 1$ si l'arête e est sélectionnée, sinon $x_e = 0$) :

$$\begin{aligned} &\text{maximiser : } \sum_{e \in E} p_e x_e \\ &\text{tel que : } \sum_{e=uv \in E} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V \\ &\quad x_e \leq 1 \quad \forall e \in E \\ &\quad x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \\ &\quad x_e \in \mathbb{N} \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

Théorème

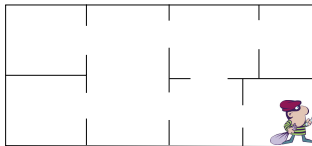
Pour un graphe **biparti**, les sommets du polytope associé à la **relaxation linéaire** du PLNE du couplage ont tous des **coordonnées entières**.

Donc, le **simplexe** va trouver “gratuitement” la solution optimale du PLNE !

Surveillance d'un bâtiment : couverture par sommets

Problème : couvrir les couloirs d'un bâtiment avec des détecteurs de mouvement.

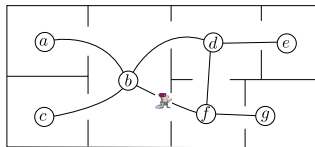
Objectif : minimiser le nombre de détecteurs



Surveillance d'un bâtiment : couverture par sommets

Problème : couvrir les couloirs d'un bâtiment avec des détecteurs de mouvement.

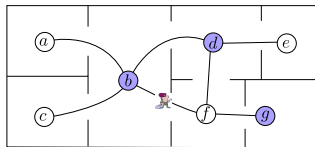
Objectif : minimiser le nombre de détecteurs



Surveillance d'un bâtiment : couverture par sommets

Problème : couvrir les couloirs d'un bâtiment avec des détecteurs de mouvement.

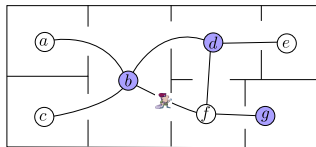
Objectif : minimiser le nombre de détecteurs



Surveillance d'un bâtiment : couverture par sommets

Problème : couvrir les couloirs d'un bâtiment avec des détecteurs de mouvement.

Objectif : minimiser le nombre de détecteurs



Le bâtiment est un graphe non-orienté $G = (V, E)$.

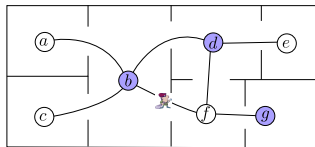
On écrit le PL en nombres entiers suivant :

Une variable x_v pour chaque sommet v : $x_v = 1$ si on a un détecteur sur v , 0 sinon.

Surveillance d'un bâtiment : couverture par sommets

Problème : couvrir les couloirs d'un bâtiment avec des détecteurs de mouvement.

Objectif : minimiser le nombre de détecteurs



Le bâtiment est un **graphe** non-orienté $G = (V, E)$.

On écrit le **PL en nombres entiers** suivant :

Une variable x_v pour chaque sommet v : $x_v = 1$ si on a un détecteur sur v , 0 sinon.

minimiser : $x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g$

tel que : $x_a + x_b \geq 1$

$x_b + x_c \geq 1$

$x_b + x_d \geq 1$

$x_b + x_f \geq 1$

$x_d + x_f \geq 1$

$x_d + x_e \geq 1$

$x_f + x_g \geq 1$

$x_a, \dots, x_g \leq 1$

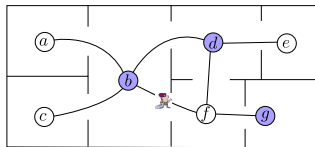
$x_a, \dots, x_g \geq 0$

$x_a, \dots, x_g \in \mathbb{N}$

Surveillance d'un bâtiment : couverture par sommets

Problème : couvrir les couloirs d'un bâtiment avec des détecteurs de mouvement.

Objectif : minimiser le nombre de détecteurs



Le bâtiment est un graphe non-orienté $G = (V, E)$.

On écrit le PL en nombres entiers suivant :

Une variable x_v pour chaque sommet v : $x_v = 1$ si on a un détecteur sur v , 0 sinon.

minimiser : $\sum_{v \in V} x_v$

tel que :

$x_u + x_v$	$\geq$	1	$\forall uv \in E$
x_v	$\leq$	1	$\forall v \in V$
x_v	$\geq$	0	$\forall v \in V$
x_v	$\in$	$\mathbb{N}$	$\forall v \in V$

Relaxation linéaire et algorithme d'approximation

Obtenir une **solution approchée** en utilisant la **relaxation linéaire** (PL normal, pas de nombres entiers)

minimiser : $\sum_{v \in V} x_v$

tel que :

$$\begin{array}{rcll} x_u + x_v & \geq & 1 & \forall uv \in E \\ x_v & \leq & 1 & \forall v \in V \\ x_v & \geq & 0 & \forall v \in V \end{array}$$

Relaxation linéaire et algorithme d'approximation

Obtenir une **solution approchée** en utilisant la **relaxation linéaire** (PL normal, pas de nombres entiers)

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser :} & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{tel que :} & x_u + x_v \geq 1 \quad \forall uv \in E \\ & x_v \leq 1 \quad \forall v \in V \\ & x_v \geq 0 \quad \forall v \in V \end{array}$$

On construit une solution S en “**arrondissant**” :

- si $x_v \geq 1/2$, on prend v dans la solution
- si $x_v < 1/2$, on ne prend pas v

Relaxation linéaire et algorithme d'approximation

Obtenir une **solution approchée** en utilisant la **relaxation linéaire** (PL normal, pas de nombres entiers)

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser :} & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{tel que :} & x_u + x_v \geq 1 \quad \forall uv \in E \\ & x_v \leq 1 \quad \forall v \in V \\ & x_v \geq 0 \quad \forall v \in V \end{array}$$

On construit une solution S en “**arrondissant**” :

- si $x_v \geq 1/2$, on prend v dans la solution
- si $x_v < 1/2$, on ne prend pas v

Théorème

*L'ensemble S obtenu est une **solution valide**, de taille au plus 2 fois l'optimum.*

(On dit qu'il y a un **écart d'intégralité** d'au plus 2.)

Relaxation linéaire et algorithme d'approximation

Obtenir une **solution approchée** en utilisant la **relaxation linéaire** (PL normal, pas de nombres entiers)

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser :} & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{tel que :} & x_u + x_v \geq 1 \quad \forall uv \in E \\ & x_v \leq 1 \quad \forall v \in V \\ & x_v \geq 0 \quad \forall v \in V \end{array}$$

On construit une solution S en “**arrondissant**” :

- si $x_v \geq 1/2$, on prend v dans la solution
- si $x_v < 1/2$, on ne prend pas v

Théorème

*L'ensemble S obtenu est une **solution valide**, de taille au plus 2 fois l'optimum.*

(On dit qu'il y a un **écart d'intégralité** d'au plus 2.)

Démonstration :

1) L'ensemble est bien valide, car pour toute arête uv , soit $x_u \geq 1/2$, soit $x_v \geq 1/2$.

Relaxation linéaire et algorithme d'approximation

Obtenir une **solution approchée** en utilisant la **relaxation linéaire** (PL normal, pas de nombres entiers)

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser :} & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{tel que :} & x_u + x_v \geq 1 \quad \forall uv \in E \\ & x_v \leq 1 \quad \forall v \in V \\ & x_v \geq 0 \quad \forall v \in V \end{array}$$

On construit une solution S en “**arrondissant**” :

- si $x_v \geq 1/2$, on prend v dans la solution
- si $x_v < 1/2$, on ne prend pas v

Théorème

*L'ensemble S obtenu est une **solution valide**, de taille au plus 2 fois l'optimum.*

(On dit qu'il y a un **écart d'intégralité** d'au plus 2.)

Démonstration :

1) L'ensemble est bien valide, car pour toute arête uv , soit $x_u \geq 1/2$, soit $x_v \geq 1/2$.

2) Le coût total est au plus le nombre N de sommets v tel que $x_v \geq 1/2$.

La solution optimale S^* du PL relaxé vaut au moins $N/2$.

Donc la taille de S est au plus $2 \cdot S^*$

C'est au plus 2 fois l'optimum du PLNE car on ne peut pas faire mieux que le PL.