Clique-Stable séparation : tour d'horizon et focus sur les graphes parfaits sans *skew* partition

Aurélie Lagoutte

Travail commun avec
Nicolas Bousquet, Stéphan Thomassé et Théophile Trunck

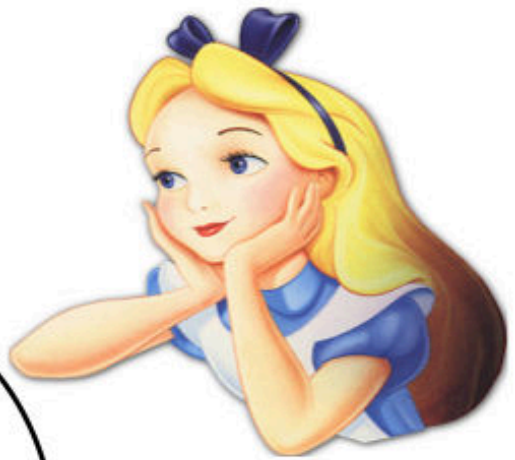
LIP, ENS Lyon

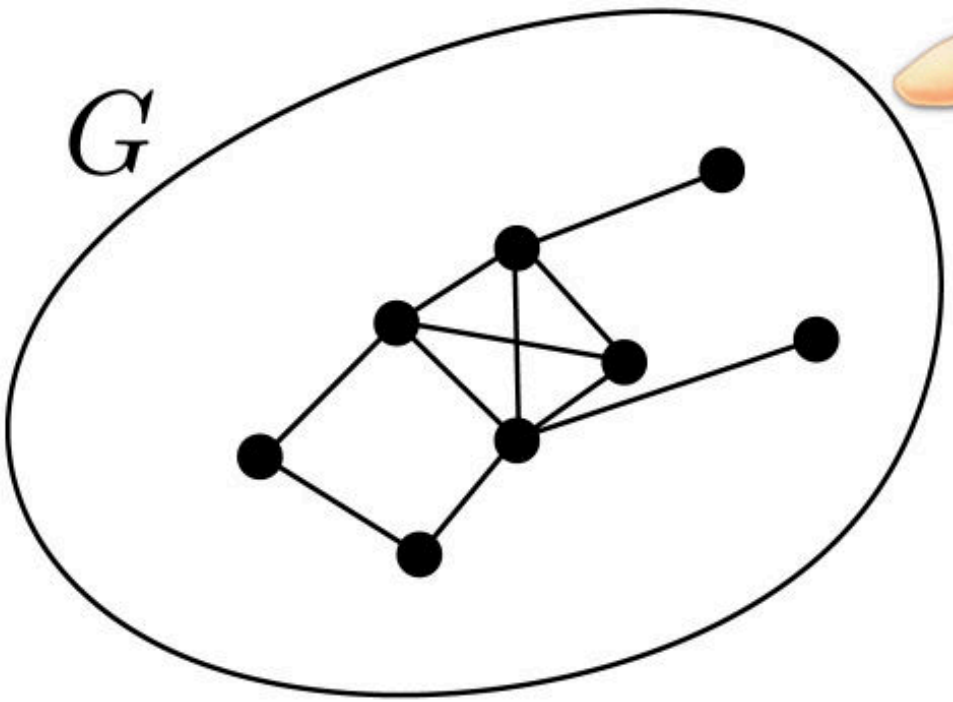
Mardi 3 décembre 2013
Séminaire MC2

1. Clique-Stable séparation
   - Définition
   - Premiers résultats
2. Graphes parfaits sans partition antisymétrique paire
   - Décomposition de graphes parfaits
   - Résultats
3. Perspectives

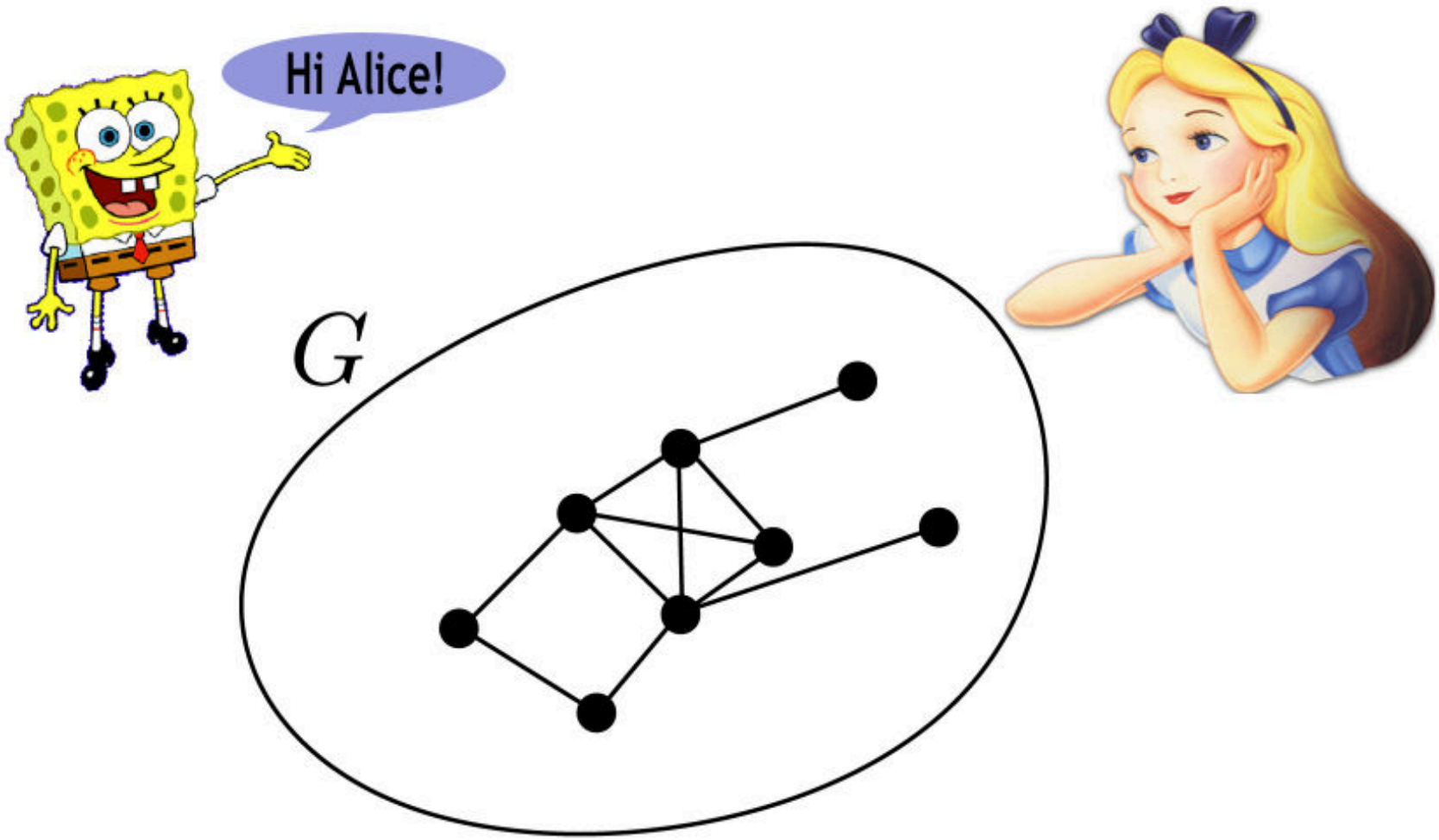
Problème Clique contre Stable





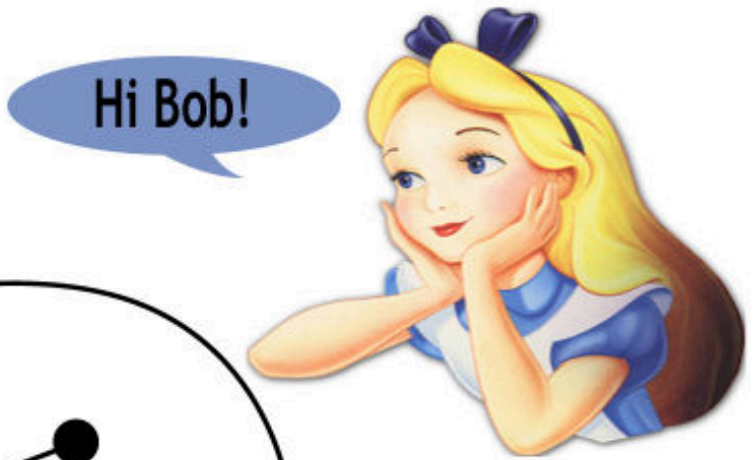


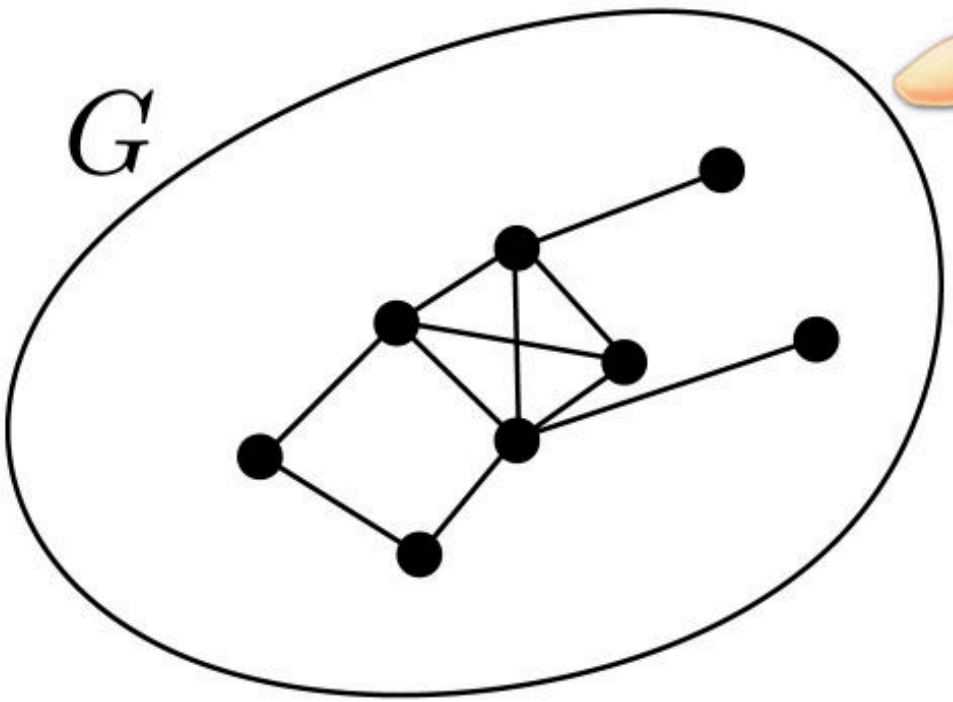
Problème Clique contre Stable



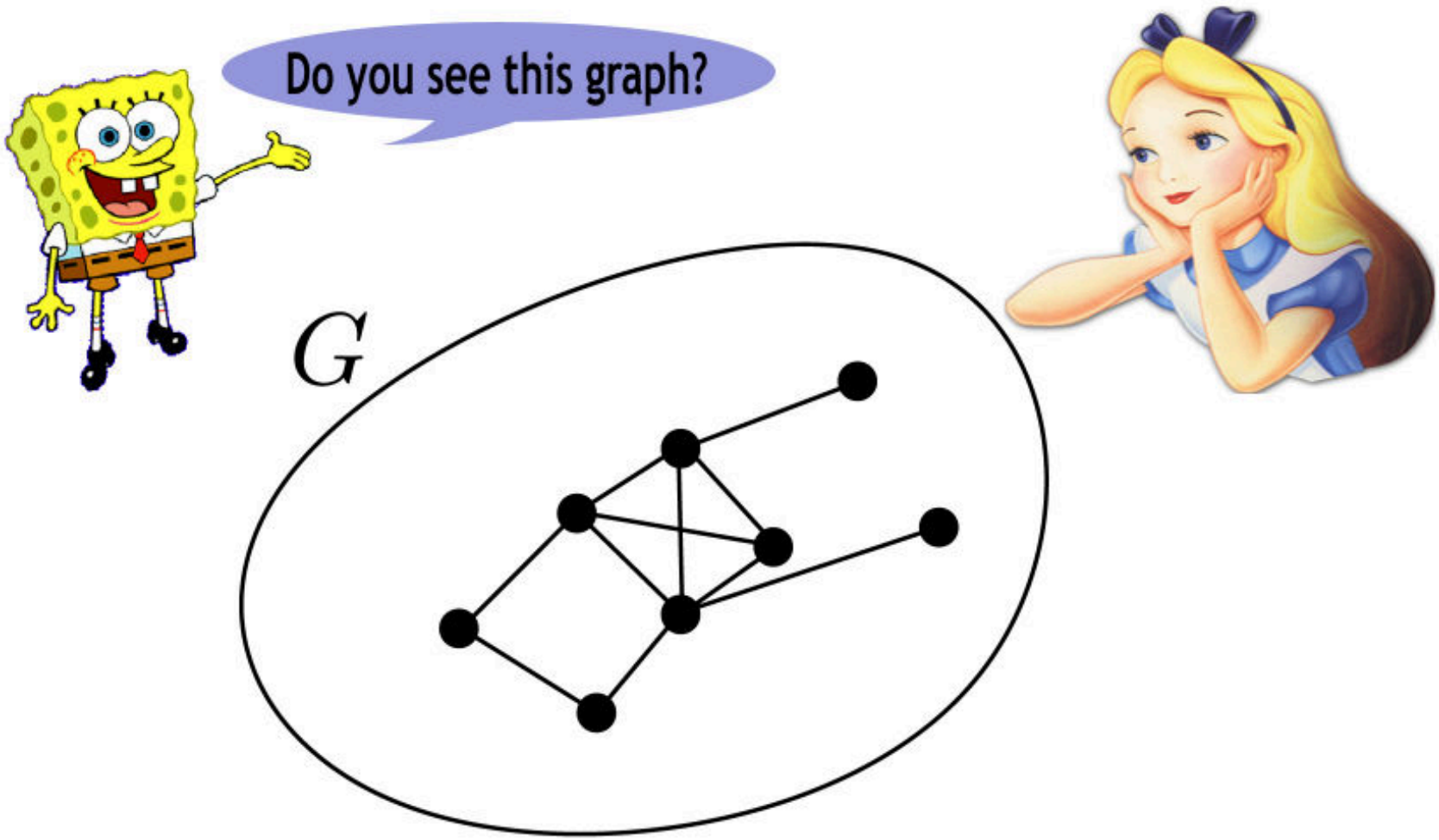
Problème Clique contre Stable



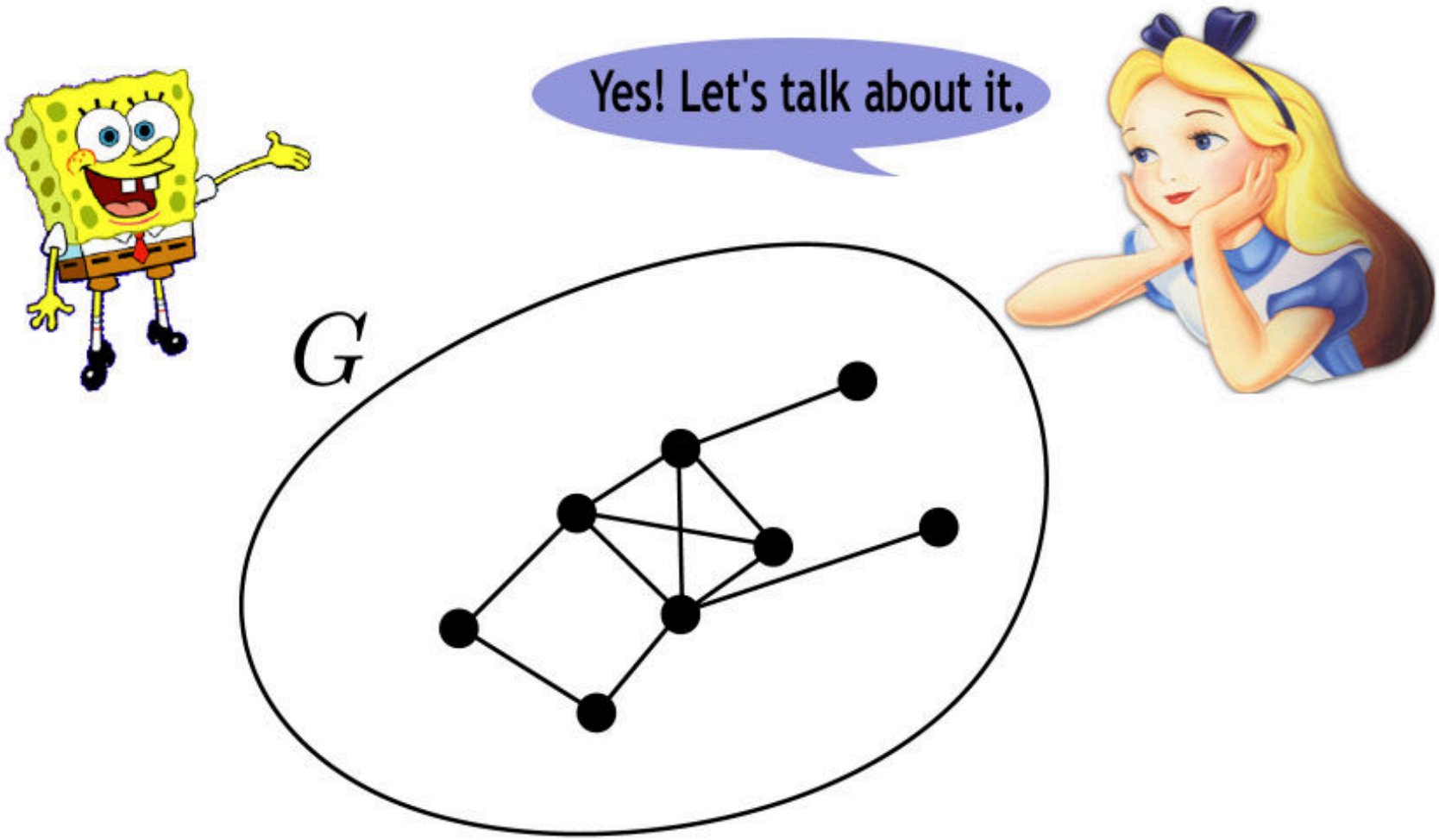




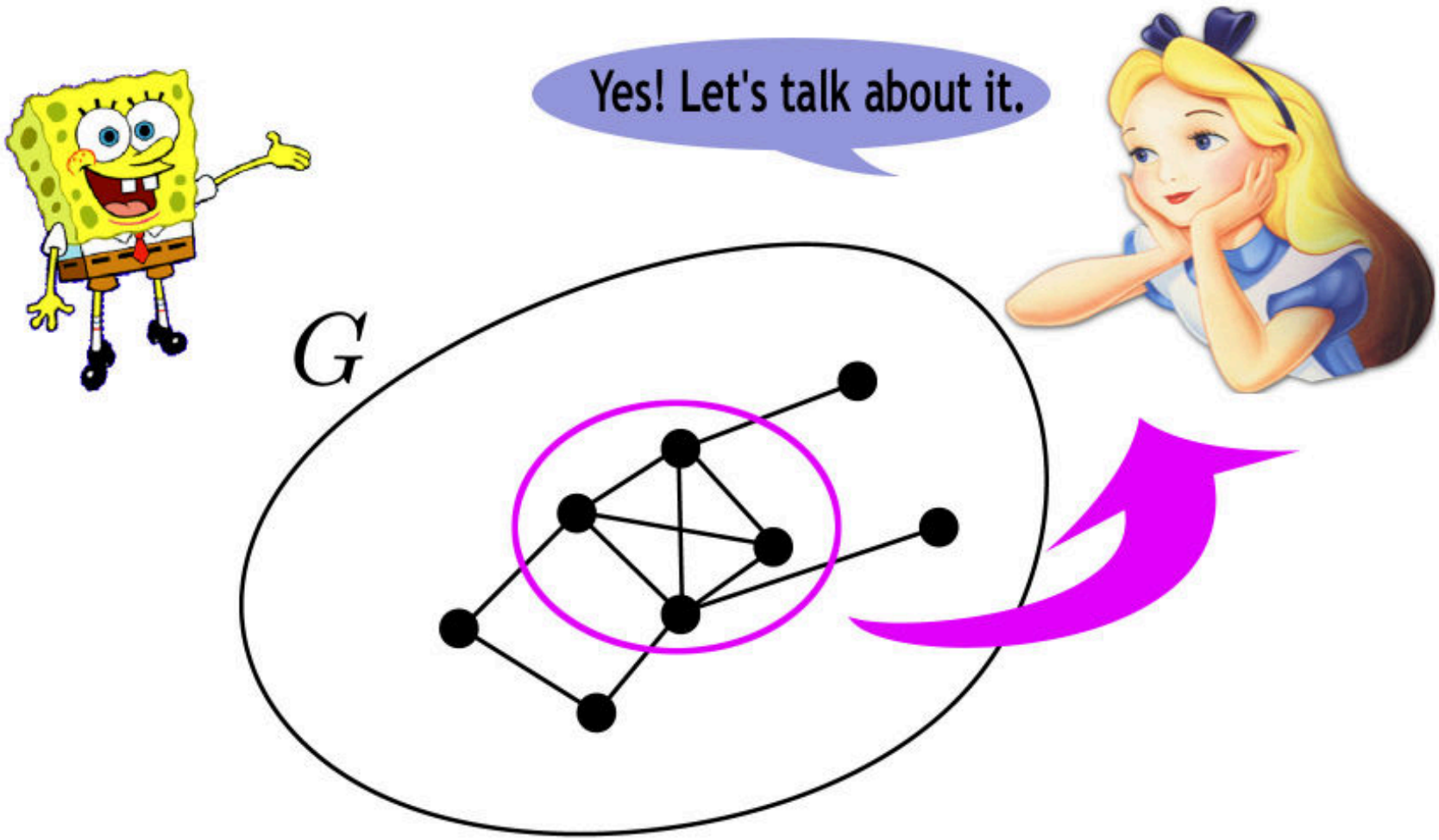
Problème Clique contre Stable



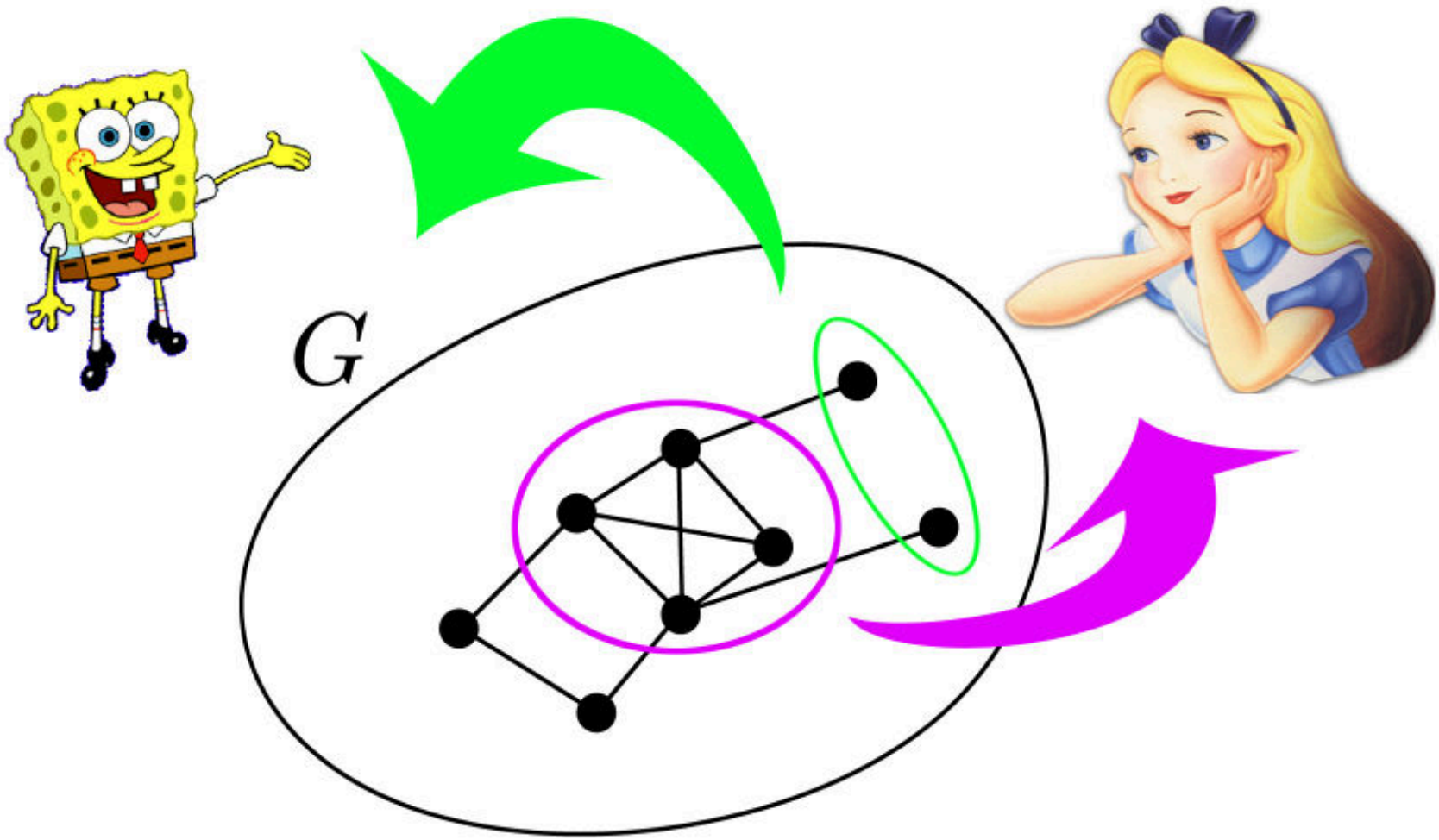
Problème Clique contre Stable



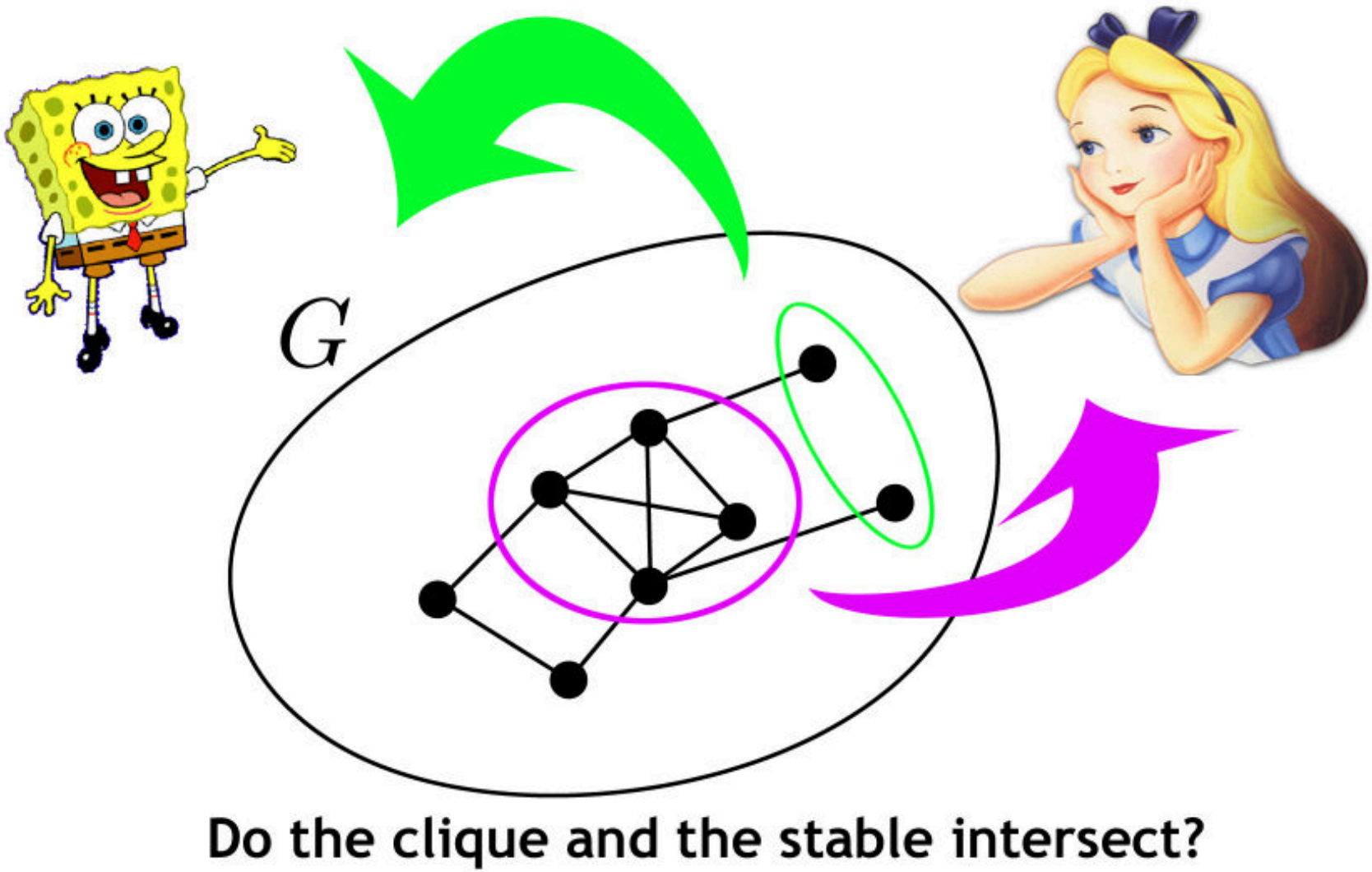
Problème Clique contre Stable



Problème Clique contre Stable

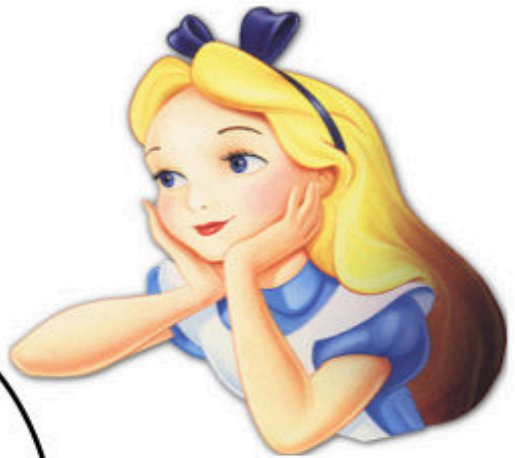


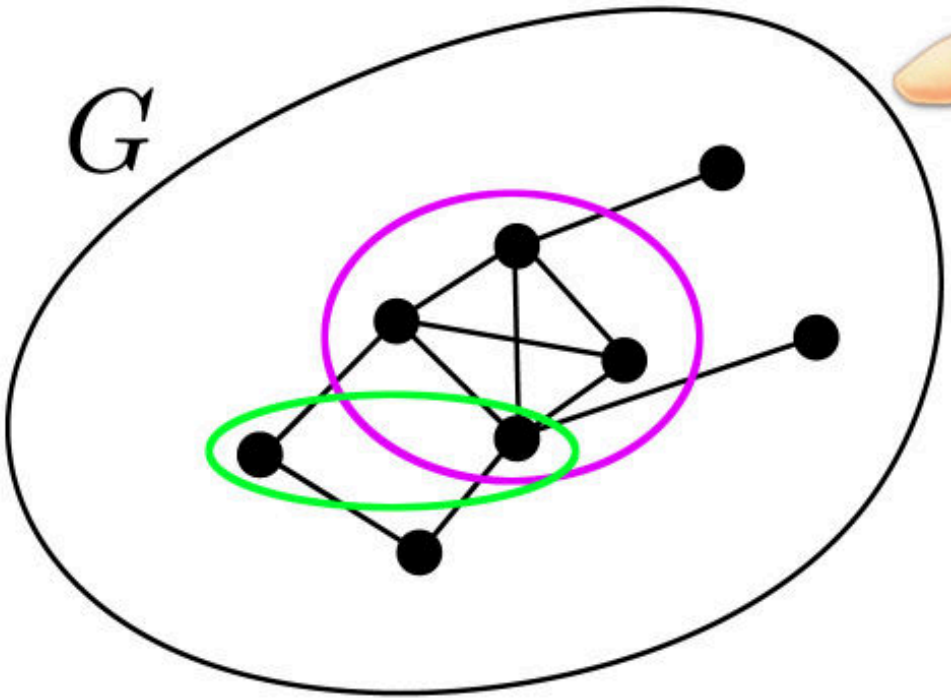
Problème Clique contre Stable



Problème Clique contre Stable : version Non-det.

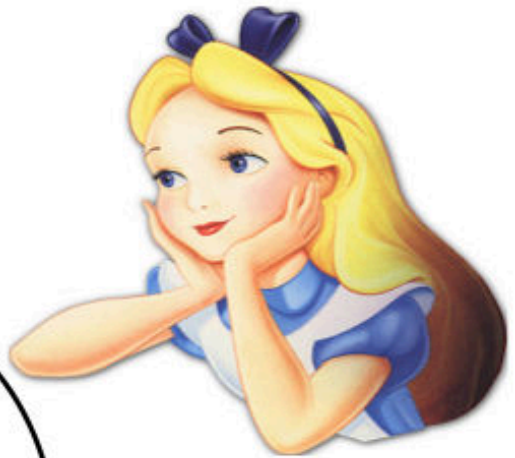


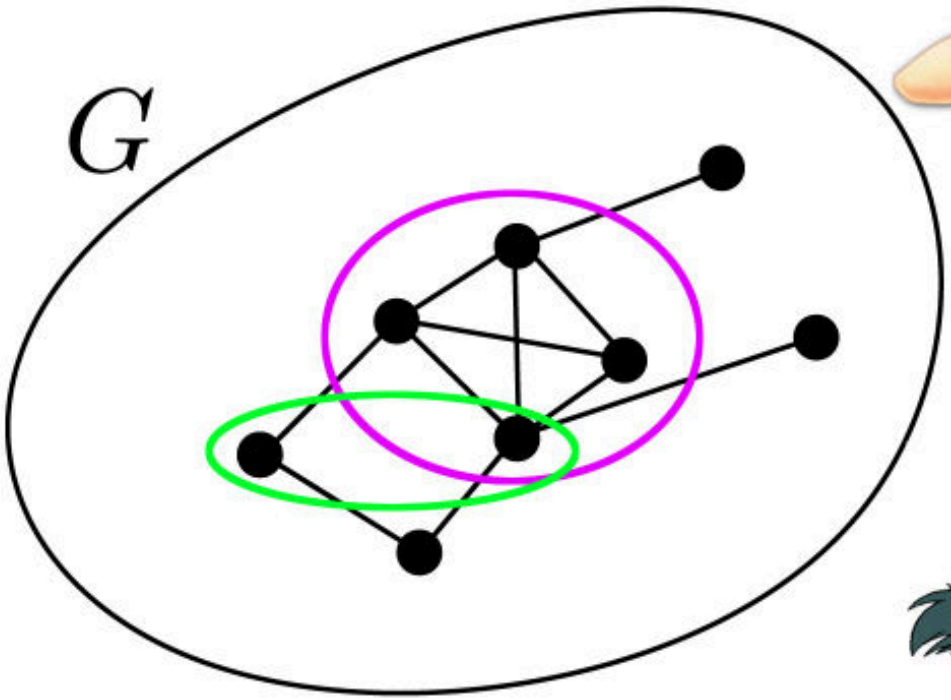




Problème Clique contre Stable : version Non-det.



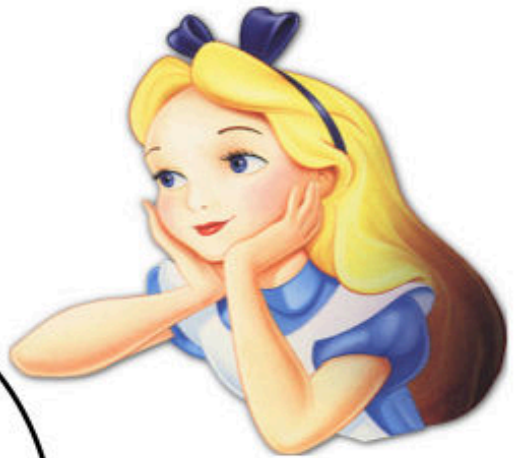


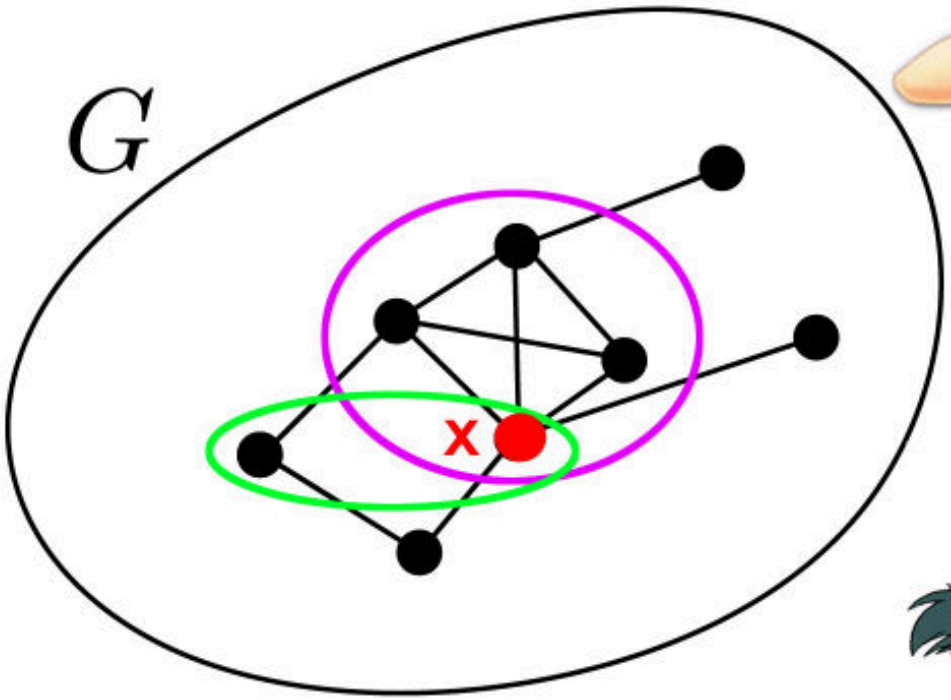




Problème Clique contre Stable : version Non-det.

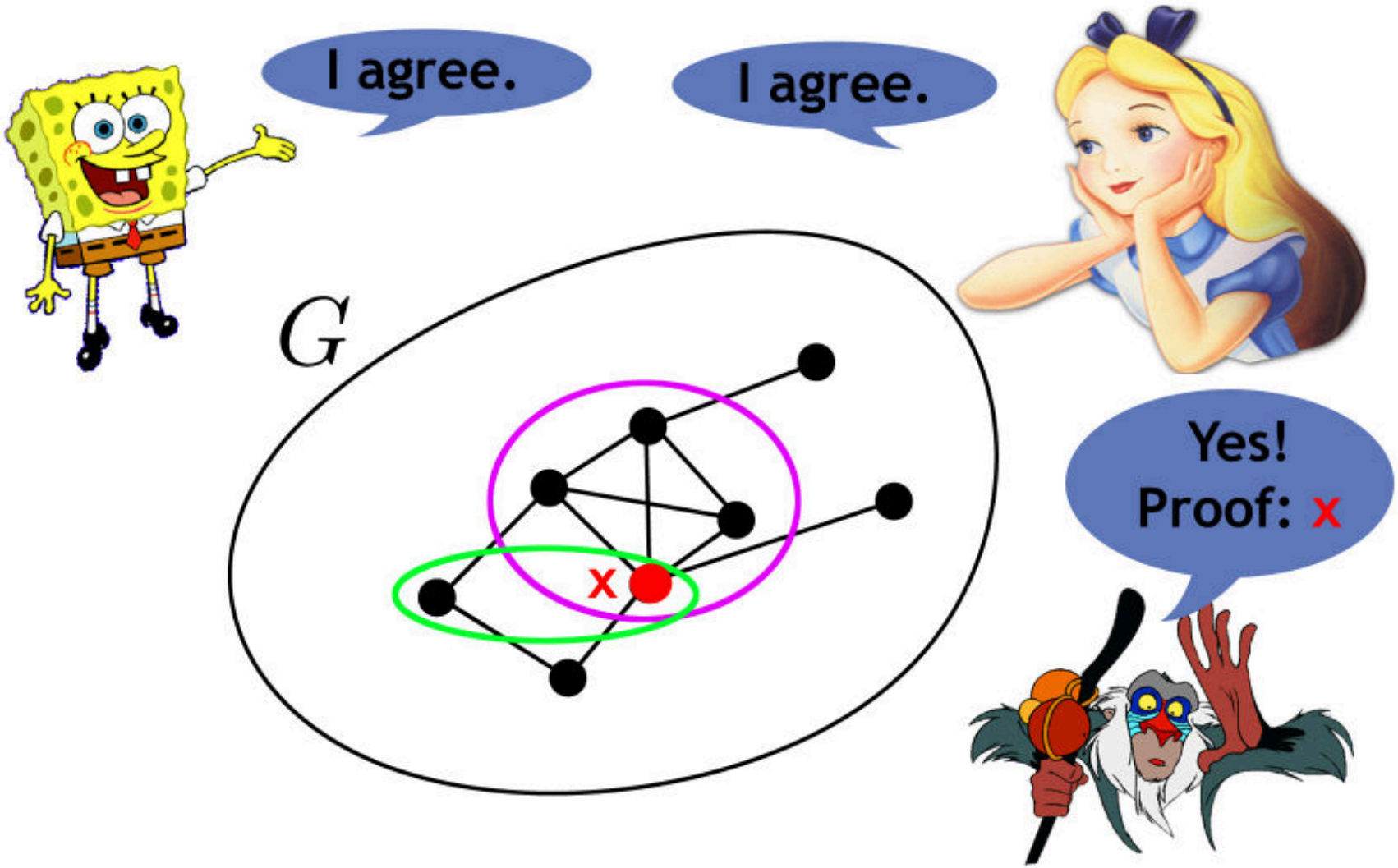






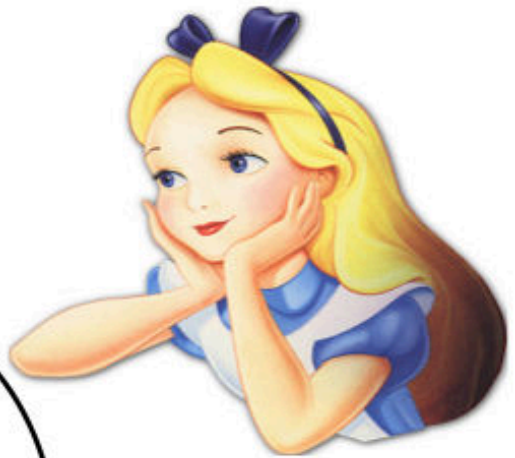


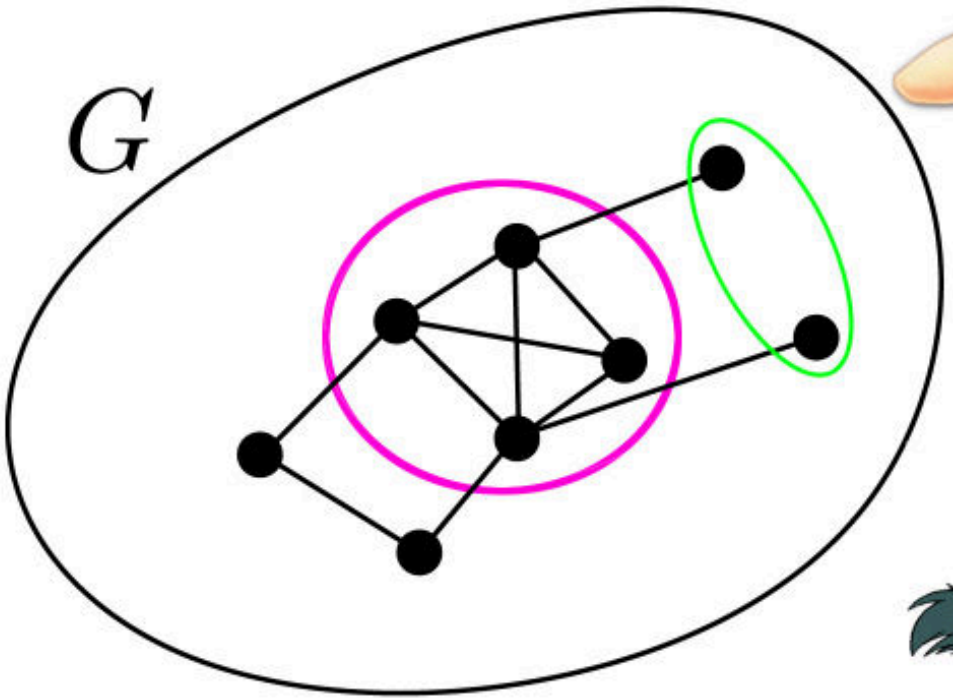
Problème Clique contre Stable : version Non-det.



Problème Clique contre Stable : version Non-det.



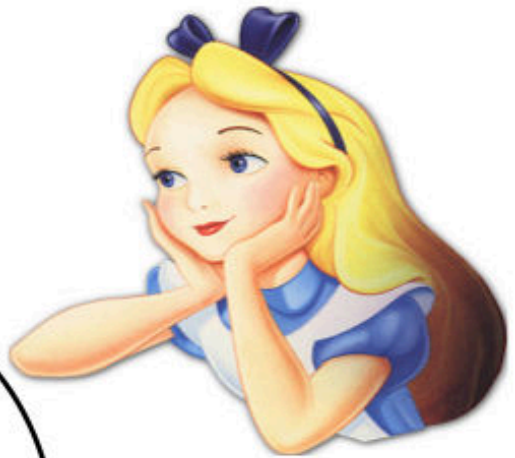


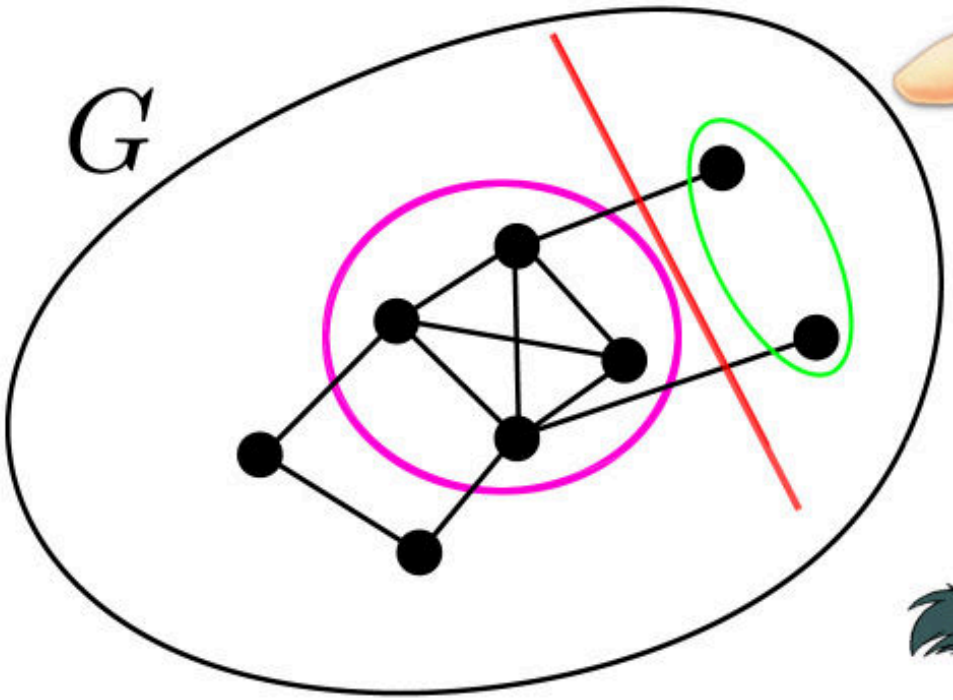




Problème Clique contre Stable : version Non-det.

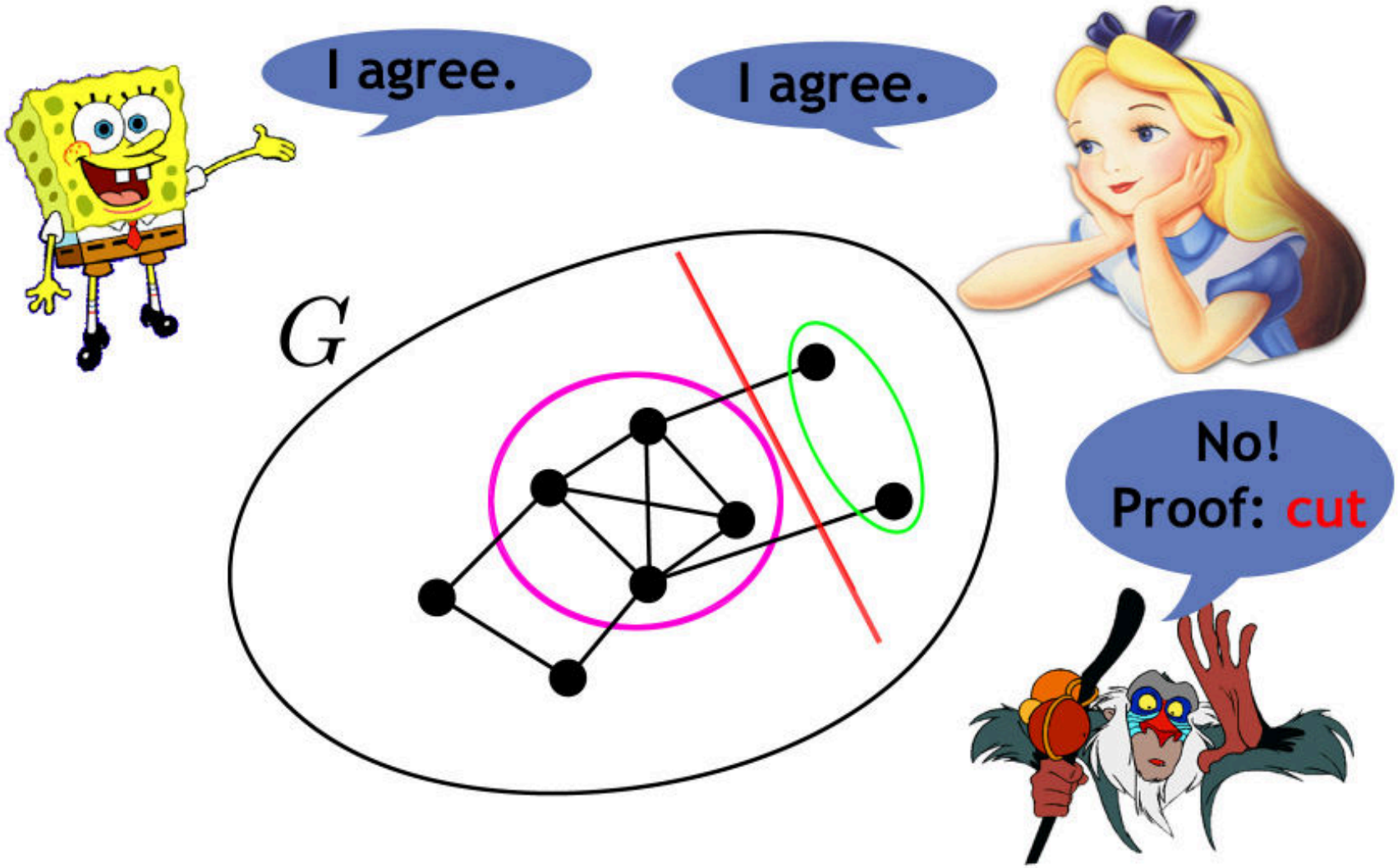








Problème Clique contre Stable : version Non-det.



Problème Clique contre Stable

But

Trouver un *Clique-Stable séparateur* : une famille de coupes qui peut séparer toutes les paires Clique-Stable.

Problème Clique contre Stable

But

Trouver un *Clique-Stable séparateur* : une famille de coupes qui peut séparer toutes les paires Clique-Stable.

Théoreme [Yannakakis 1991]

Complexité de communication non-déterministe $= \log m$
où m est la taille minimale d'un CS-séparateur.
Si $m = n^c$, alors la complexité est de $\mathcal{O}(\log n)$.

Problème Clique contre Stable

But

Trouver un *Clique-Stable séparateur* : une famille de coupes qui peut séparer toutes les paires Clique-Stable.

Théoreme [Yannakakis 1991]

Complexité de communication non-déterministe $= \log m$
où m est la taille minimale d'un CS-séparateur.
Si $m = n^c$, alors la complexité est de $\mathcal{O}(\log n)$.

Borne Sup [Yannakakis 1991] : Il existe un CS-separateur de taille $\mathcal{O}(n^{\log n})$.
Borne Inf [Amano, Shigeta 2013] : Il existe une famille de graphes dans laquelle la taille d'un CS-separateur est $\Omega(n^{2-\varepsilon})$

Problème Clique contre Stable

But

Trouver un *Clique-Stable séparateur* : une famille de coupes qui peut séparer toutes les paires Clique-Stable.

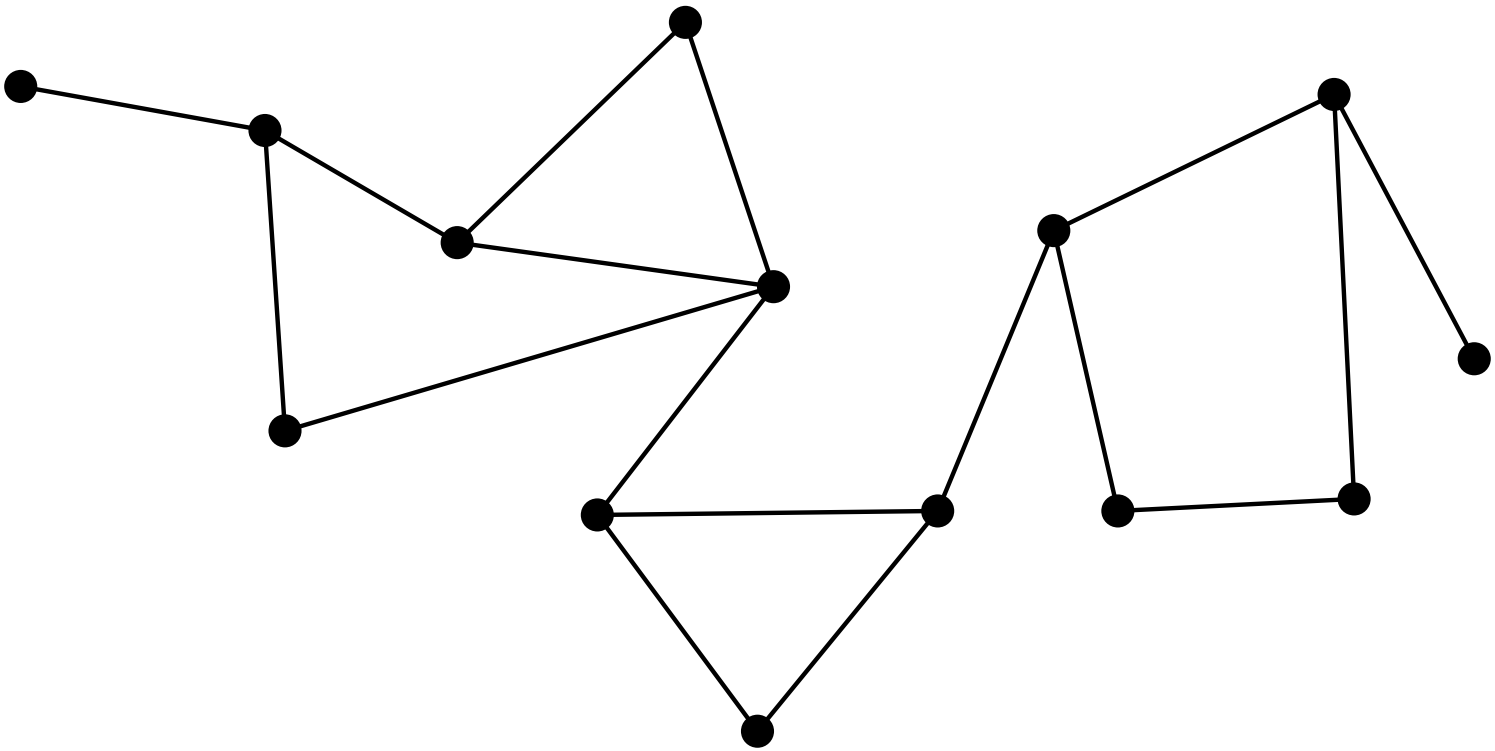
Théoreme [Yannakakis 1991]

Complexité de communication non-déterministe $= \log m$
où m est la taille minimale d'un CS-séparateur.
Si $m = n^c$, alors la complexité est de $\mathcal{O}(\log n)$.

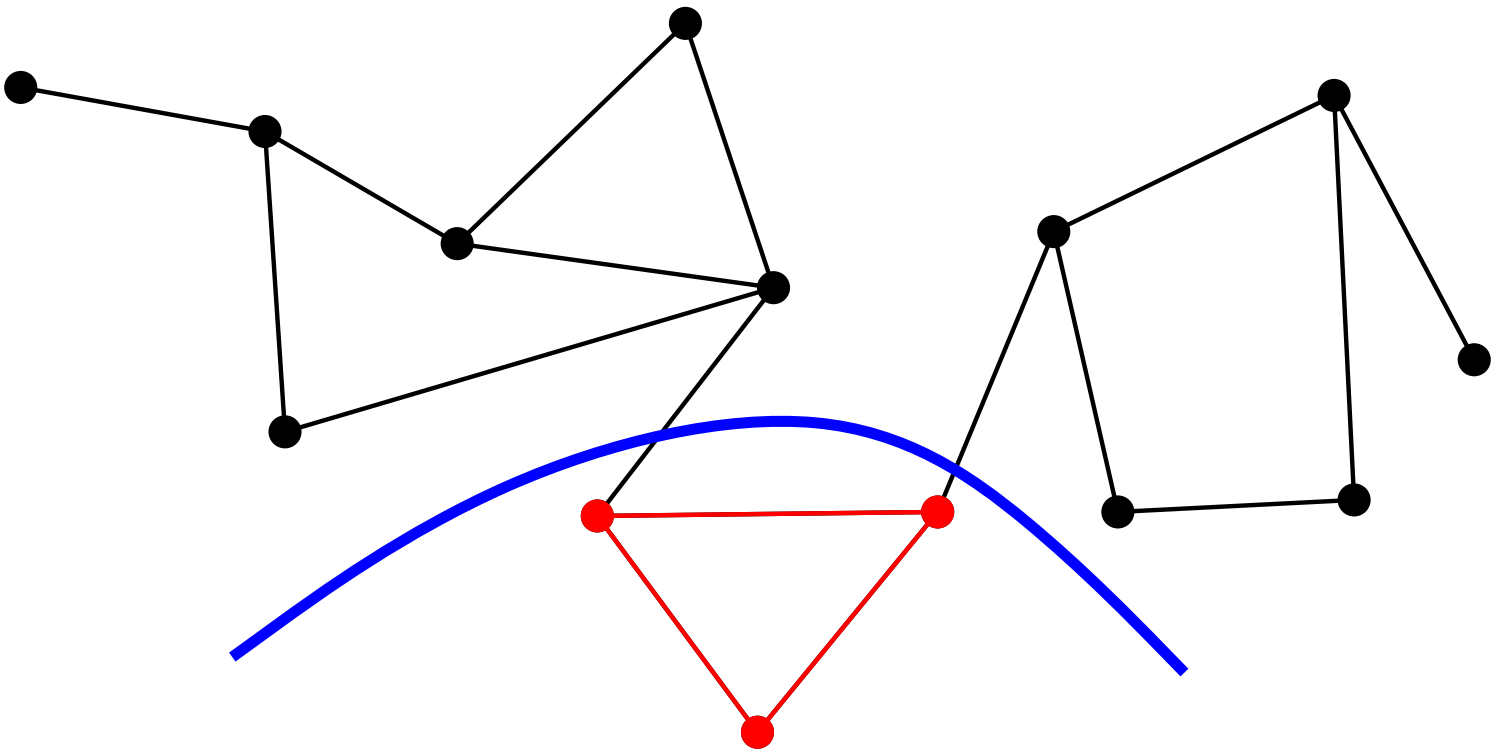
Borne Sup [Yannakakis 1991] : Il existe un CS-separateur de taille $\mathcal{O}(n^{\log n})$.
Borne Inf [Amano, Shigeta 2013] : Il existe une famille de graphes dans laquelle la taille d'un CS-separateur est $\Omega(n^{2-\varepsilon})$
Est-ce qu'il existe pour tout graphe G à n sommets un CS-separateur de taille poly(n) ? Pour quelles classes de graphes est-ce vrai ?

Dans quelles classes a-t-on un CS-séparateur polynomial ?

Dans quelles classes a-t-on un CS-séparateur polynomial ?
Un exemple facile : si la taille de la clique maximale ω est bornée, disons par 3 :

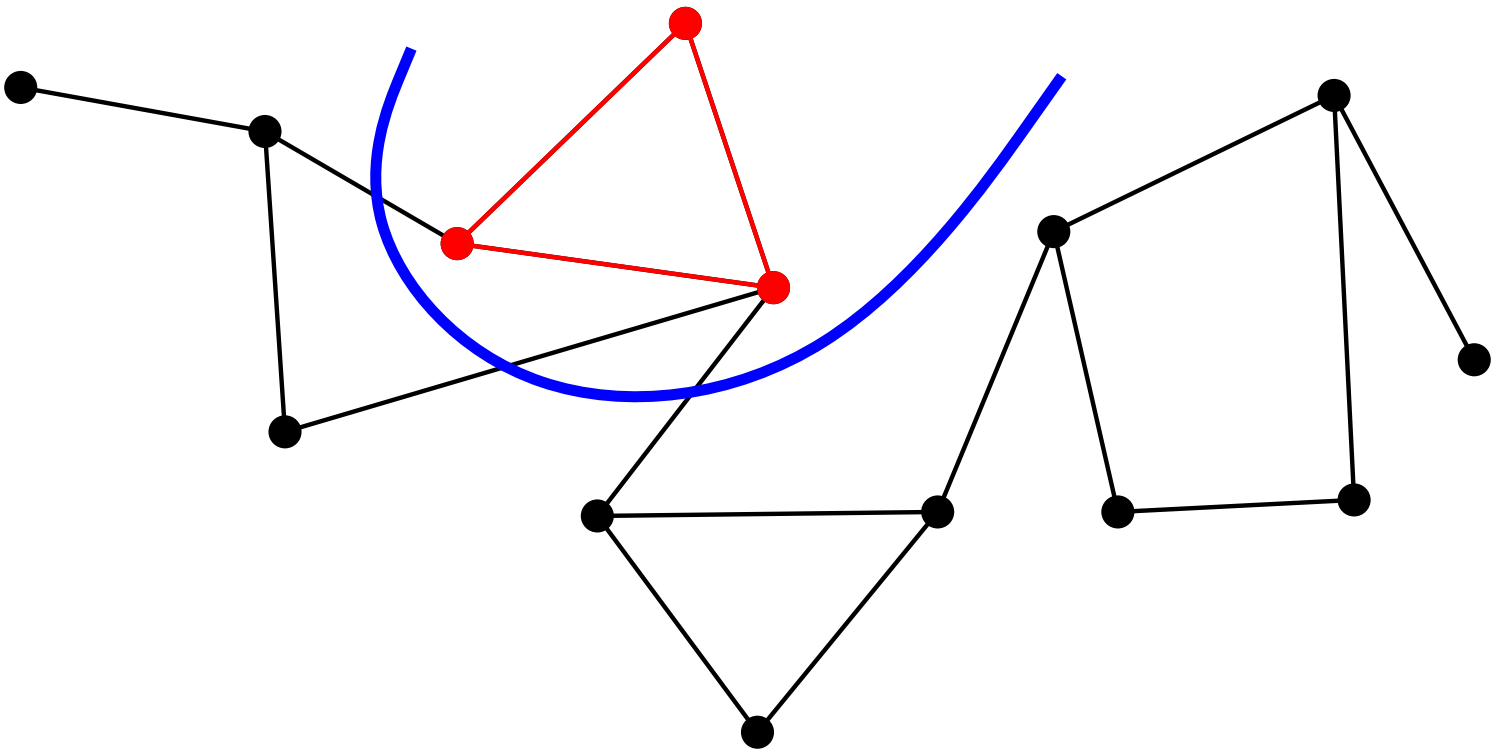


Dans quelles classes a-t-on un CS-séparateur polynomial ?
Un exemple facile : si la taille de la clique maximale ω est bornée, disons par 3 :



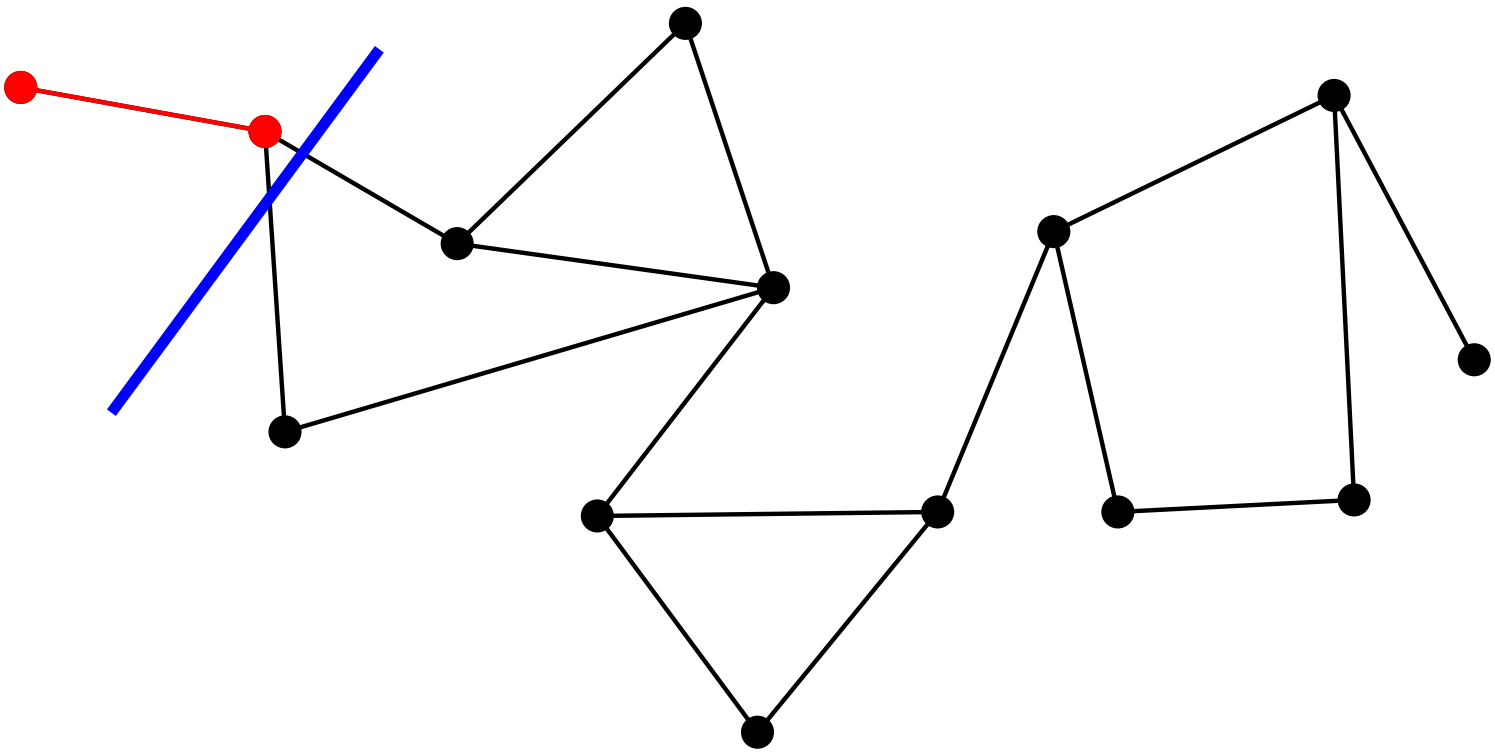
Pour tout ensemble T de taille ≤ 3, on prend $(T, V \setminus T)$
$\Rightarrow$ CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^3)$.

Dans quelles classes a-t-on un CS-séparateur polynomial ?
Un exemple facile : si la taille de la clique maximale ω est bornée, disons par 3 :



Pour tout ensemble T de taille ≤ 3, on prend $(T, V \setminus T)$
$\Rightarrow$ CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^3)$.

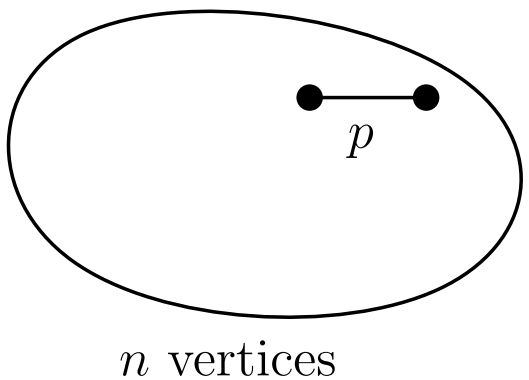
Dans quelles classes a-t-on un CS-séparateur polynomial ?
Un exemple facile : si la taille de la clique maximale ω est bornée, disons par 3 :



Pour tout ensemble T de taille ≤ 3, on prend $(T, V \setminus T)$
$\Rightarrow$ CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^3)$.

Graphes aléatoires [Bousquet, L., Thomassé 2012]

- Modèle d'Erdős-Rényi $G(n, p)$.



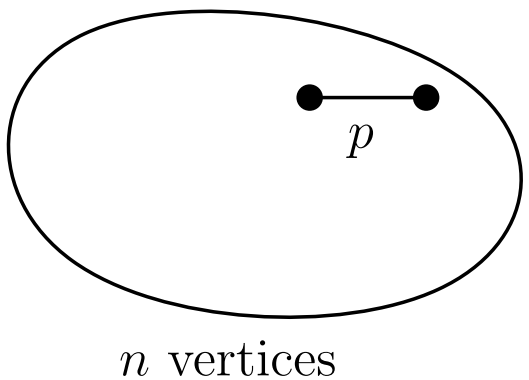
Graphes aléatoires [Bousquet, L., Thomassé 2012]

- Modèle d'Erdős-Rényi $G(n, p)$.
- Une borne sup pour la taille maximale des cliques et des stables :

$$r_\omega = \frac{3 \log n}{-\log p} \qquad r_\alpha = \frac{3 \log n}{-\log(1-p)}$$

$$Pr(\exists \text{ une clique } K, |K| = r_\omega) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

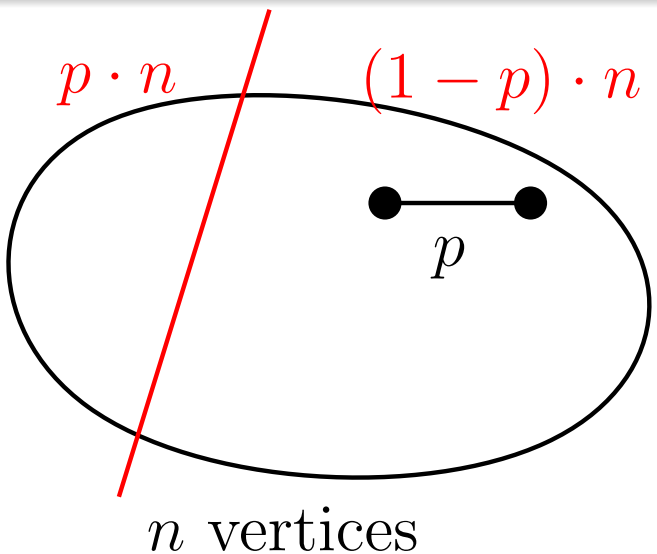
$$Pr(\exists \text{ un stable } S, |S| = r_\alpha) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$



Graphes aléatoires [Bousquet, L., Thomassé 2012]

On sépare tous les sous-ensembles K, S tels que $K \leq r_\omega$ et $S \leq r_\alpha$:

- Coupes aléatoires $(p, 1-p)$
- Etant donnée une paire (K, S) et une coupe C : $\Pr((K, S) \text{ est séparée par } C) \geq 1/n^6$
- Double comptage : $\exists$ une coupe qui sépare $1/n^6$ de toutes les paires.
- En itérant $\rightarrow$ CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^7)$.



Sans Split

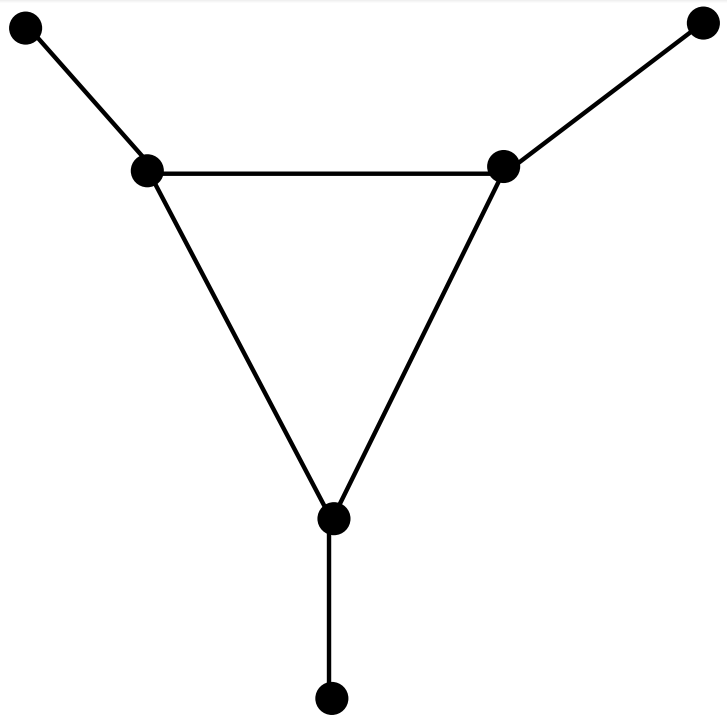
Graphes de comparabilité [Yannakakis 1991]

Les graphes de comparabilité admettent un CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$.

Sans Split

Graphes de comparabilité [Yannakakis 1991]

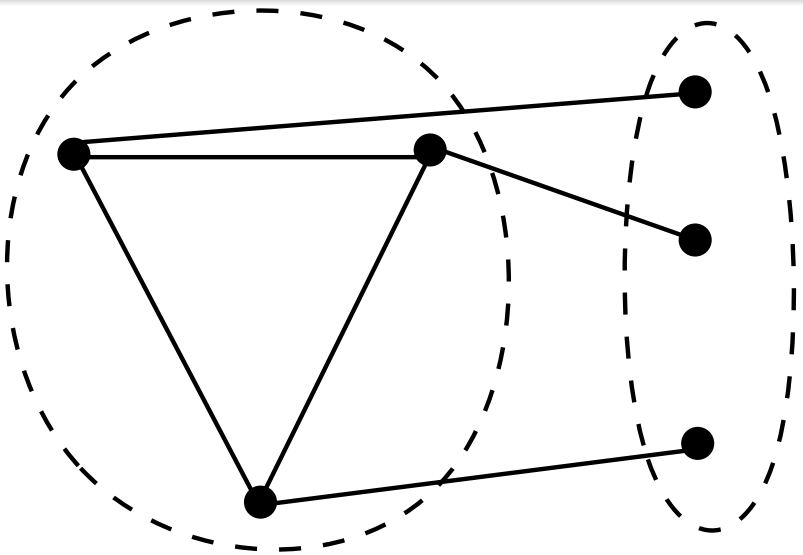
Les graphes de comparabilité admettent un CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$.



Sans Split

Graphes de comparabilité [Yannakakis 1991]

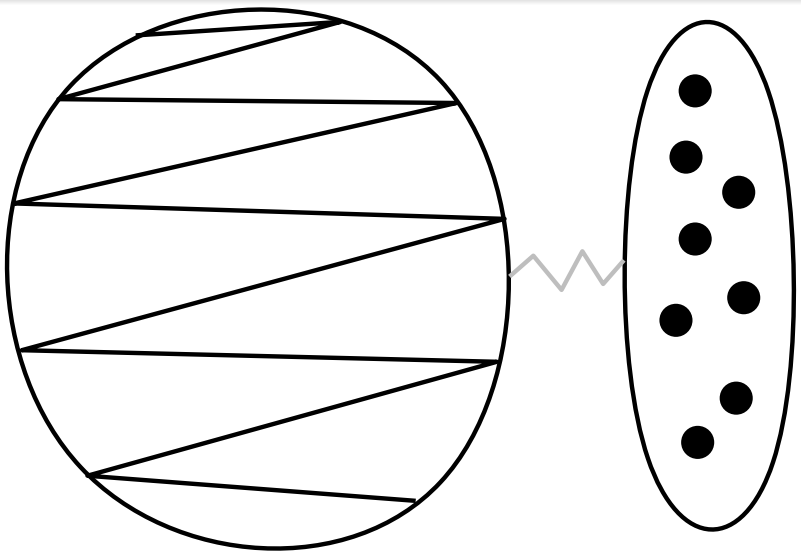
Les graphes de comparabilité admettent un CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$.



Sans Split

Graphes de comparabilité [Yannakakis 1991]

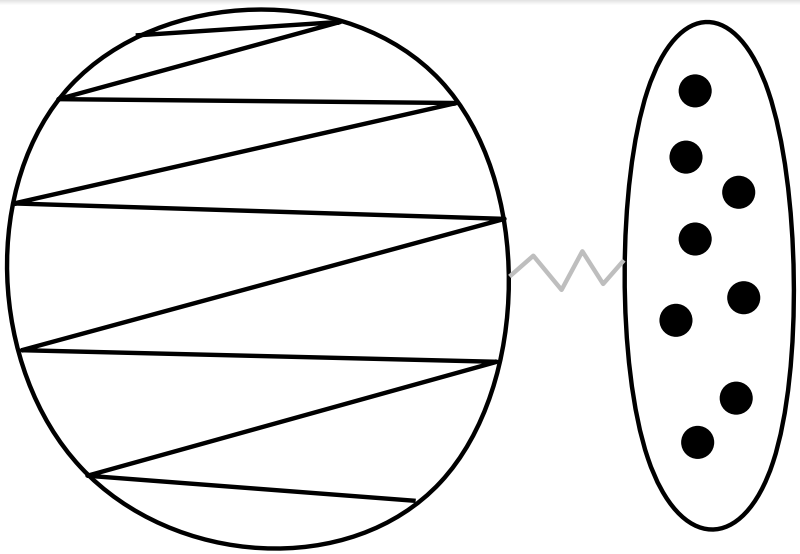
Les graphes de comparabilité admettent un CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$.



Sans Split

Graphes de comparabilité [Yannakakis 1991]

Les graphes de comparabilité admettent un CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$.



Sans Split [Bousquet, L., Thomassé 2012]

Soit H un graphe split. Alors il existe un CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^{c_H})$ pour les graphes sans H induit.



Graphes sans P_k ni $\overline{P_k}$ induits [Bousquet, L., Thomassé 2013]

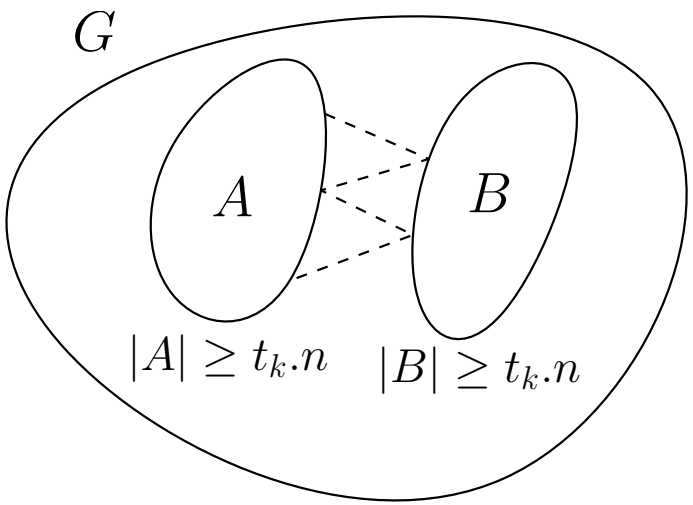
Il existe un CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^{c_k})$ pour tout graphe sans P_k ni $\overline{P_k}$.

Graphes sans P_k ni $\overline{P_k}$ induits [Bousquet, L., Thomassé 2013]

Il existe un CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^{c_k})$ pour tout graphe sans P_k ni $\overline{P_k}$.

Propriété $\diamondsuit$ [Bousquet, L., Thomassé]

Pour tout k, il existe une constant $t_k > 0$ telle que tout graphe sans P_k ni $\overline{P_k}$ admet deux ensembles de sommets A et B de taille au moins $t_k.n$, avec A complètement antiadjacent à B ou complètement adjacent à B.

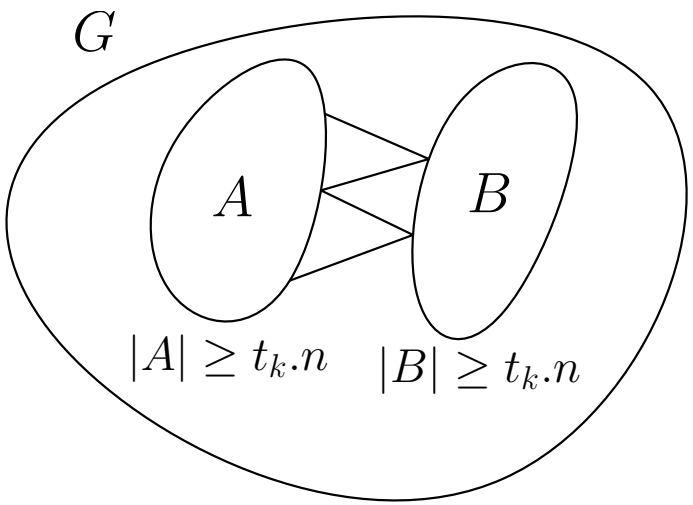


Graphes sans P_k ni $\overline{P_k}$ induits [Bousquet, L., Thomassé 2013]

Il existe un CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^{c_k})$ pour tout graphe sans P_k ni $\overline{P_k}$.

Propriété $\diamondsuit$ [Bousquet, L., Thomassé]

Pour tout k, il existe une constant $t_k > 0$ telle que tout graphe sans P_k ni $\overline{P_k}$ admet deux ensembles de sommets A et B de taille au moins $t_k.n$, avec A complètement antiadjacent à B ou complètement adjacent à B.



La propriété $\diamondsuit$ est intéressante car, dans les classes de graphes closes par sous-graphes induits, elle implique la CS-séparation et la propriété d'Erdős-Hajnal :

Propriété d'Erdős-Hajnal pour la classe $\mathcal{C}$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{C}$ admet une clique ou un stable de taille n^{ε}.

La propriété $\diamondsuit$ est intéressante car, dans les classes de graphes closes par sous-graphes induits, elle implique la CS-séparation et la propriété d'Erdős-Hajnal :

Propriété d'Erdős-Hajnal pour la classe $\mathcal{C}$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{C}$ admet une clique ou un stable de taille n^{ε}.

Exclure seulement P_k et pas $\overline{P_k}$?

La propriété $\diamondsuit$ est intéressante car, dans les classes de graphes closes par sous-graphes induits, elle implique la CS-séparation et la propriété d'Erdős-Hajnal :

Propriété d'Erdős-Hajnal pour la classe $\mathcal{C}$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout graphe $G \in \mathcal{C}$ admet une clique ou un stable de taille n^{ε}.

Exclure seulement P_k et pas $\overline{P_k}$? Oui pour $k = 5$.

Graphes sans P_5 induit [Bousquet, L., Thomassé 2013], conséquence de [Loksthanov, Vatshelle, Villanger 2013]

Tout graphe sans P_5 admet un CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^8)$.

1 Clique-Stable séparation
- Définition
- Premiers résultats

2 Graphes parfaits sans partition antisymétrique paire
- Décomposition de graphes parfaits
- Résultats

3 Perspectives

Graphe parfait

On note $\omega(G)$ la taille maximale d'une clique et $\chi(G)$ le nombre chromatique de G. Un graphe est appelé *parfait* si pour tout sous-graphe induit H, on a :

$$\chi(H) = \omega(H)$$

Graphe de Berge

Un *trou* est un cycle induit (sans corde) de longueur au moins 4. Un graphe G est *de Berge* si ni G ni $\overline{G}$ n' ont de trou de longueur impaire.

Théorème fort des graphes parfaits, [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas 2006]

Un graphe est parfait si et seulement si il est de Berge.

Décomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas 2006]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

Décomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas 2006]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

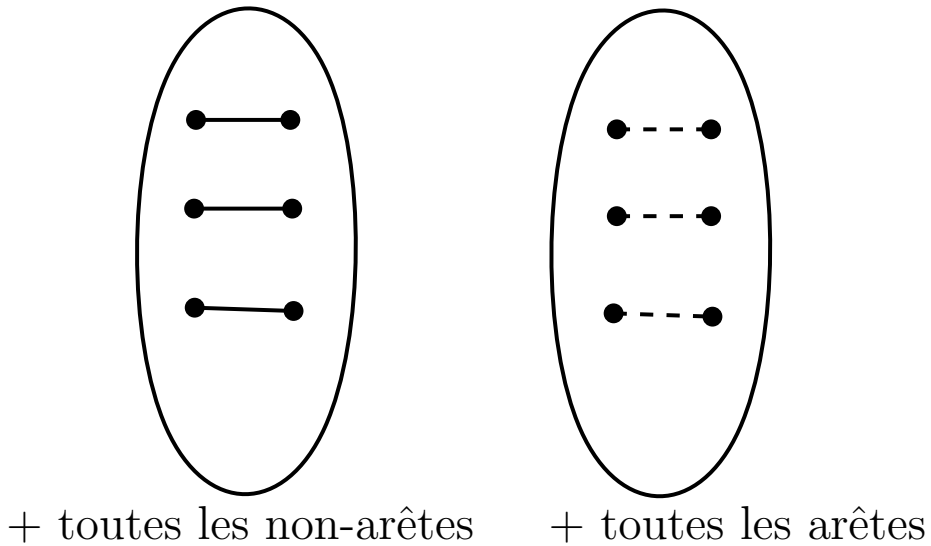


FIGURE : Double split

Décomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas 2006]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

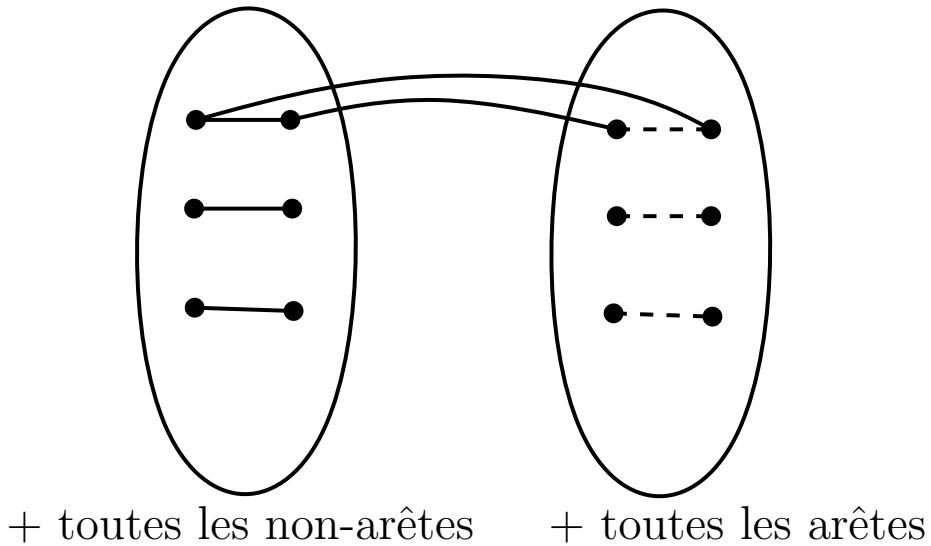


FIGURE : Double split

Décomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas 2006]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

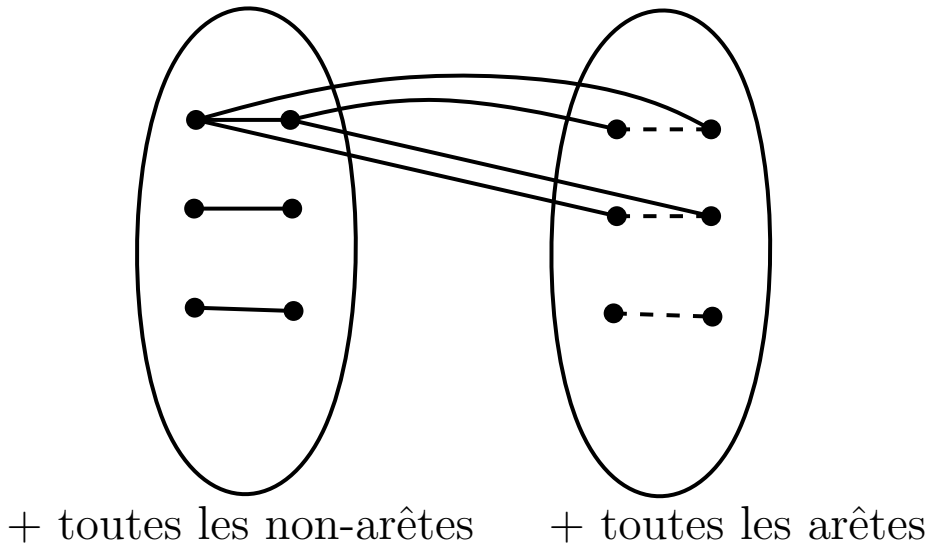


FIGURE : Double split

Décomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas 2006]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

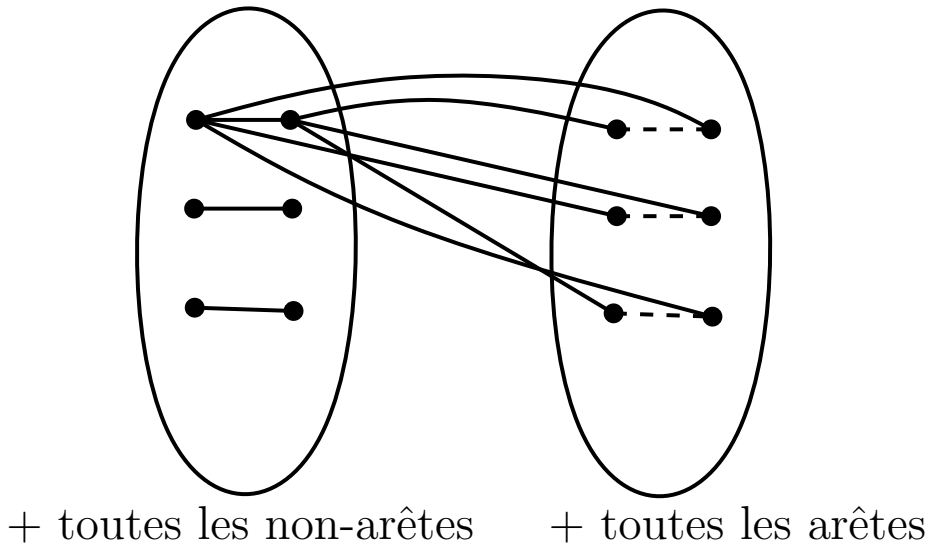


FIGURE : Double split

Décomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas 2006]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

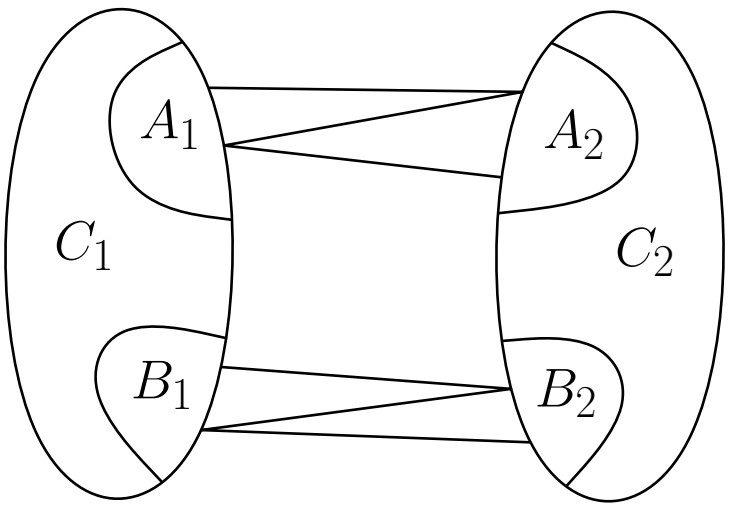


FIGURE : 2-joint

Décomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas 2006]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

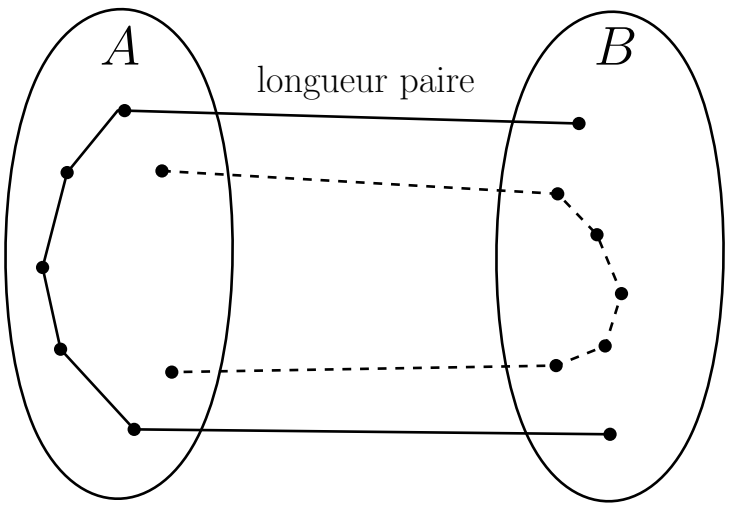


FIGURE : Partition paire

Décomposition [Chudnovsky, Roberston, Seymour, Thomas 2006]

Si un graphe de Berge, alors pour G ou $\overline{G}$:

- Soit c'est un graphe basique : biparti, line graphe de biparti, ou double split.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

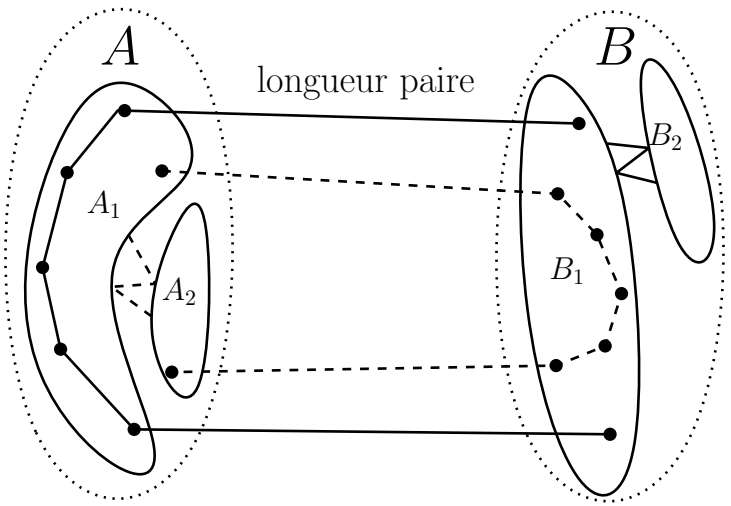


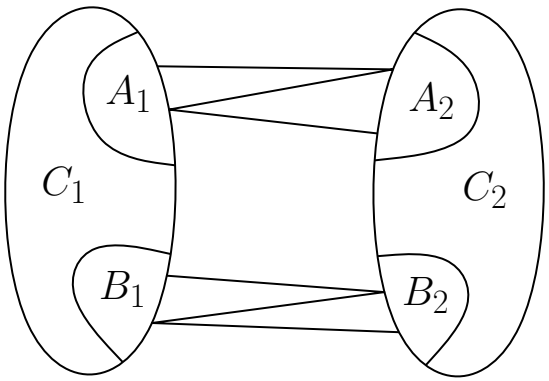
FIGURE : Partition antisymétrique paire

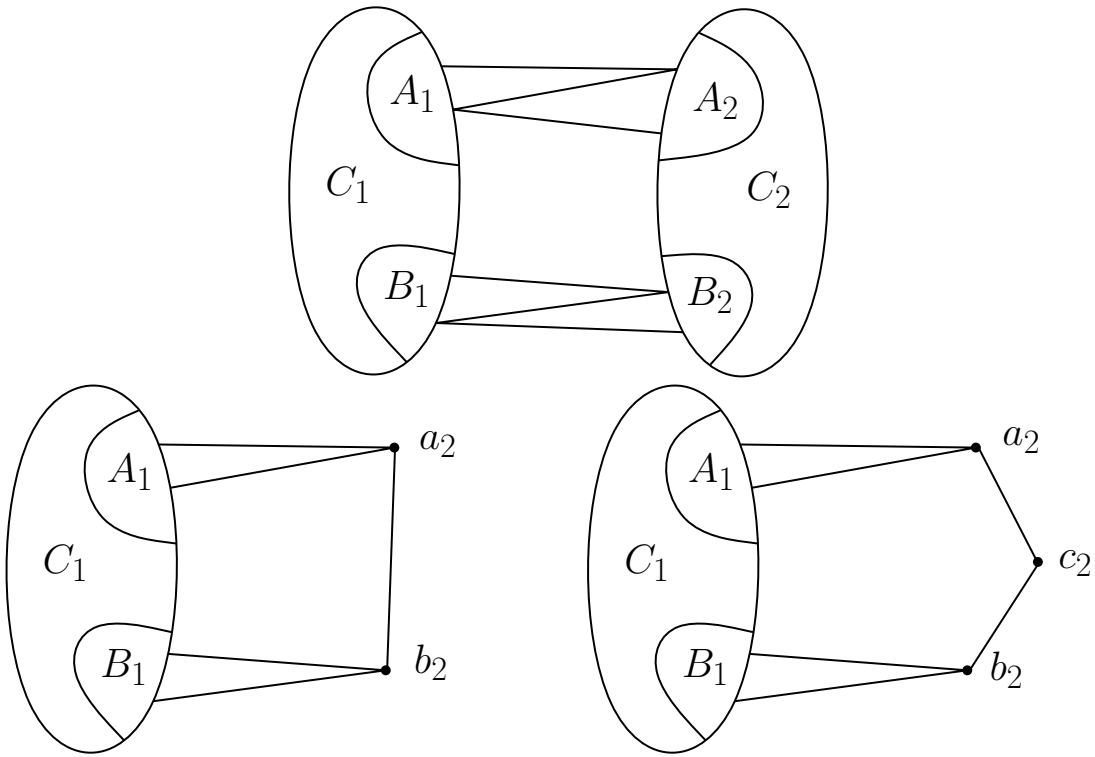
Théorème [L., Trunck 2013]

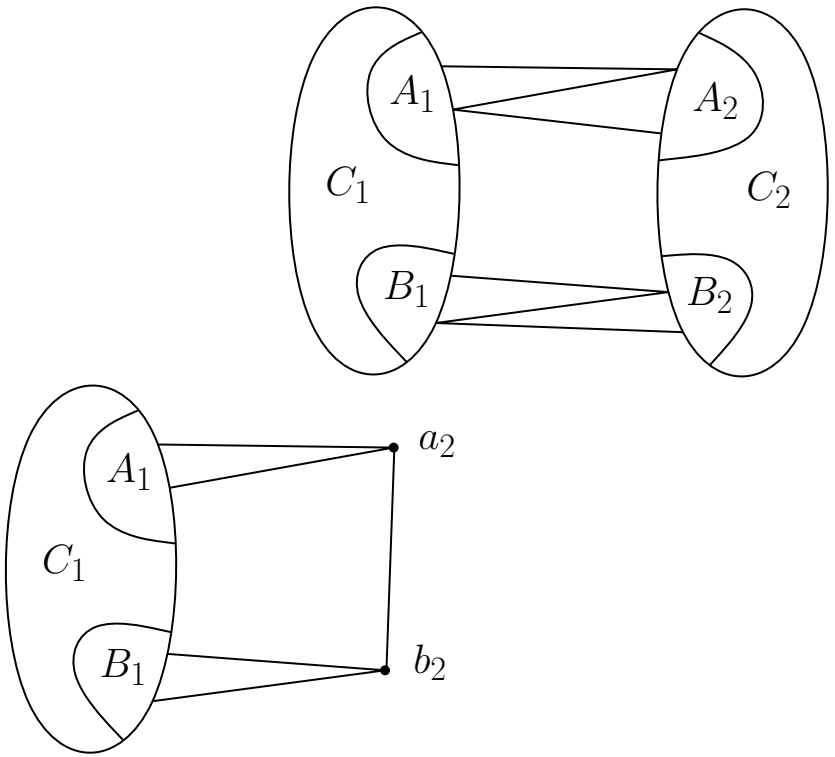
Soit G un graphe parfait sans partition antisymétrique paire, alors il existe un Clique-Stable séparateur pour G de taille $\mathcal{O}(n^2)$.

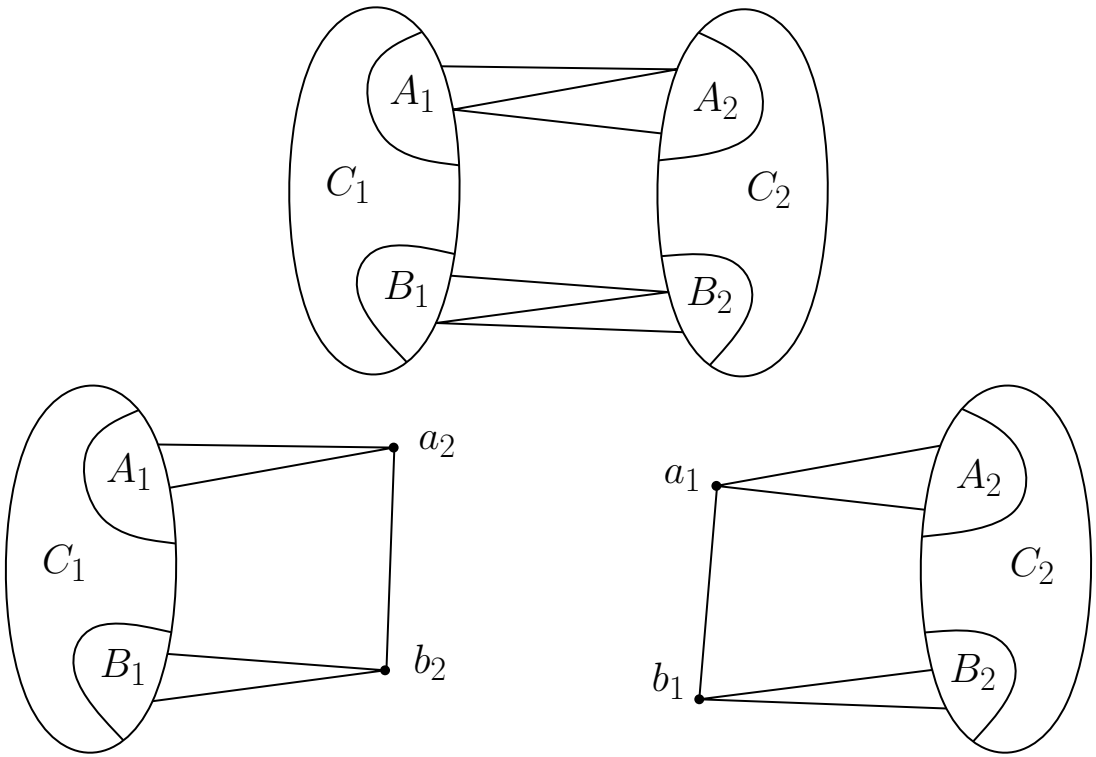
Preuve par récurrence :

- Pour les graphes basiques
- Pour un graphe G avec un 2-joint :
  à partir de G, on construit un (deux) graphe(s) parfait(s) G' sans partition antisymétrique paire
  [Chudnovsky, Trotignon, Trunck, Vušković 2012]
  $\Rightarrow$ un Clique-Stable séparateur pour G' par hypothèse de récurrence
  $\Rightarrow$ on le transforme en un Clique-Stable séparateur pour G.

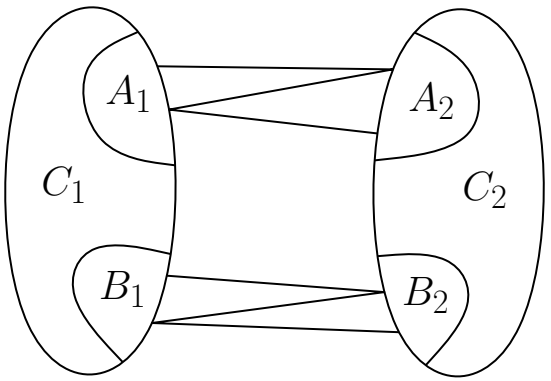

A_1
A_2
C_1
C_2
B_1
B_2

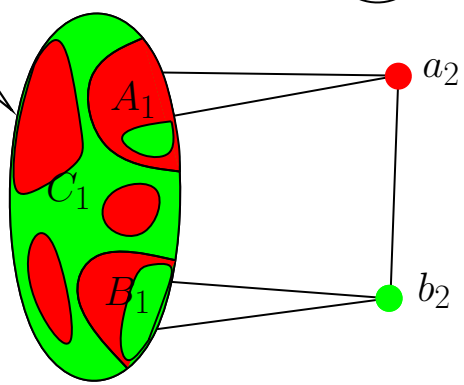

A_1
A_2
C_1
C_2
B_1
B_2
a_2
A_1
C_1
B_1
b_2
a_2
A_1
C_1
c_2
B_1
b_2

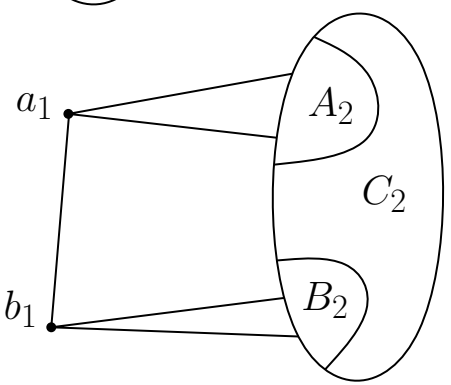

A_1
A_2
C_1
C_2
B_1
B_2
a_2
A_1
C_1
B_1
b_2


A_1
A_2
C_1
C_2
B_1
B_2
a_2
A_1
C_1
B_1
b_2
a_1
A_2
C_2
b_1
B_2

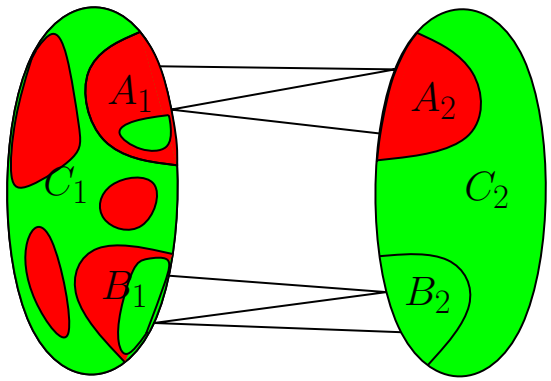
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)

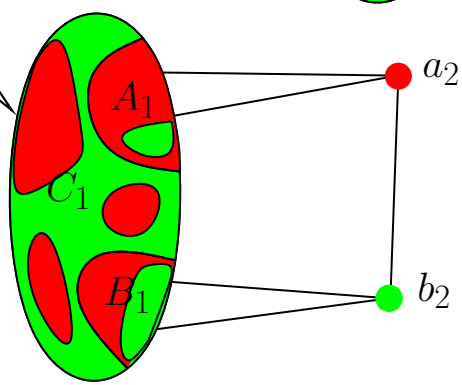


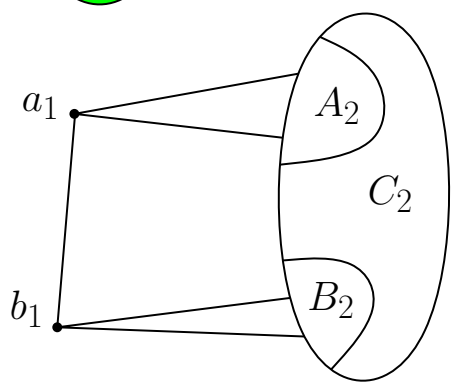




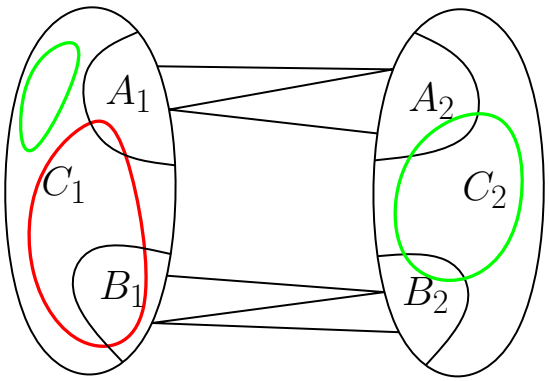
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)

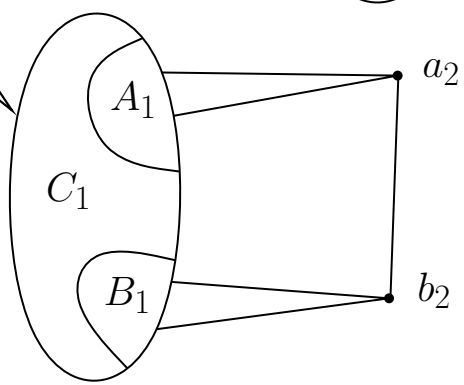


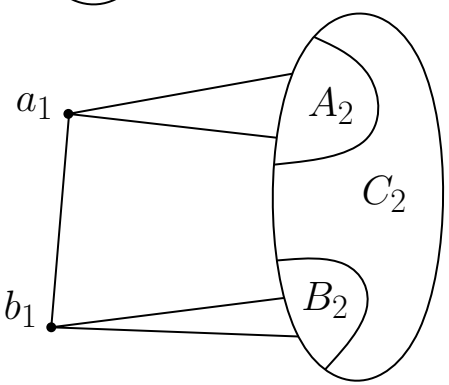




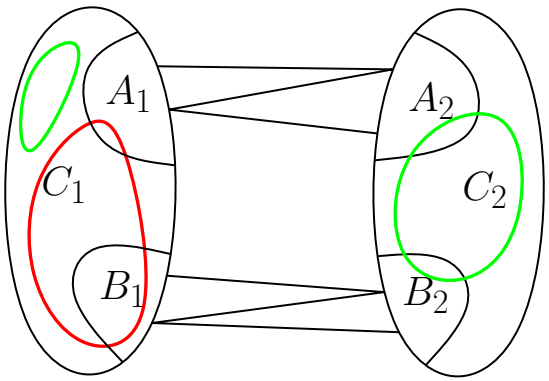
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)

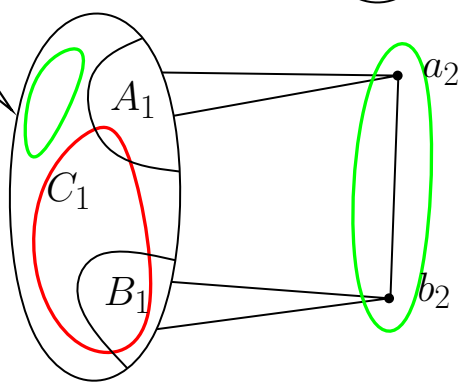


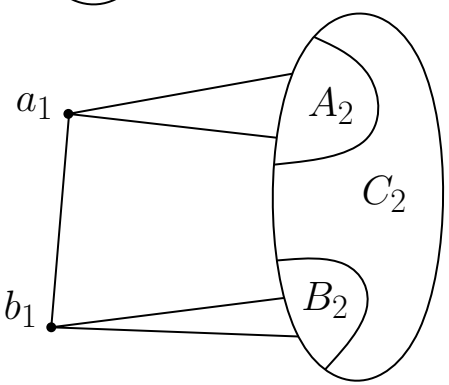




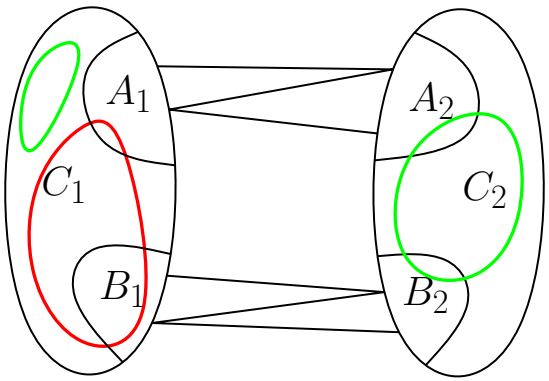
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)

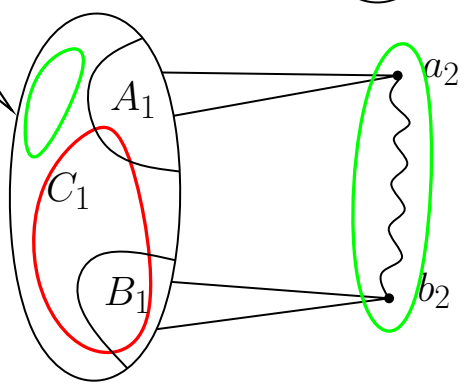


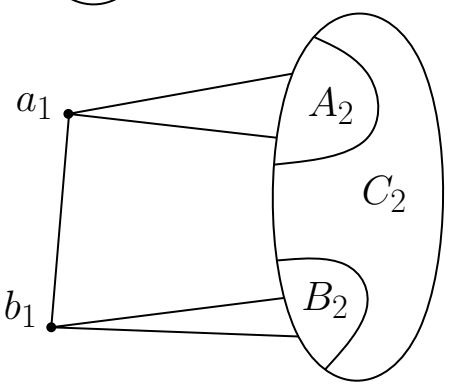




Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)







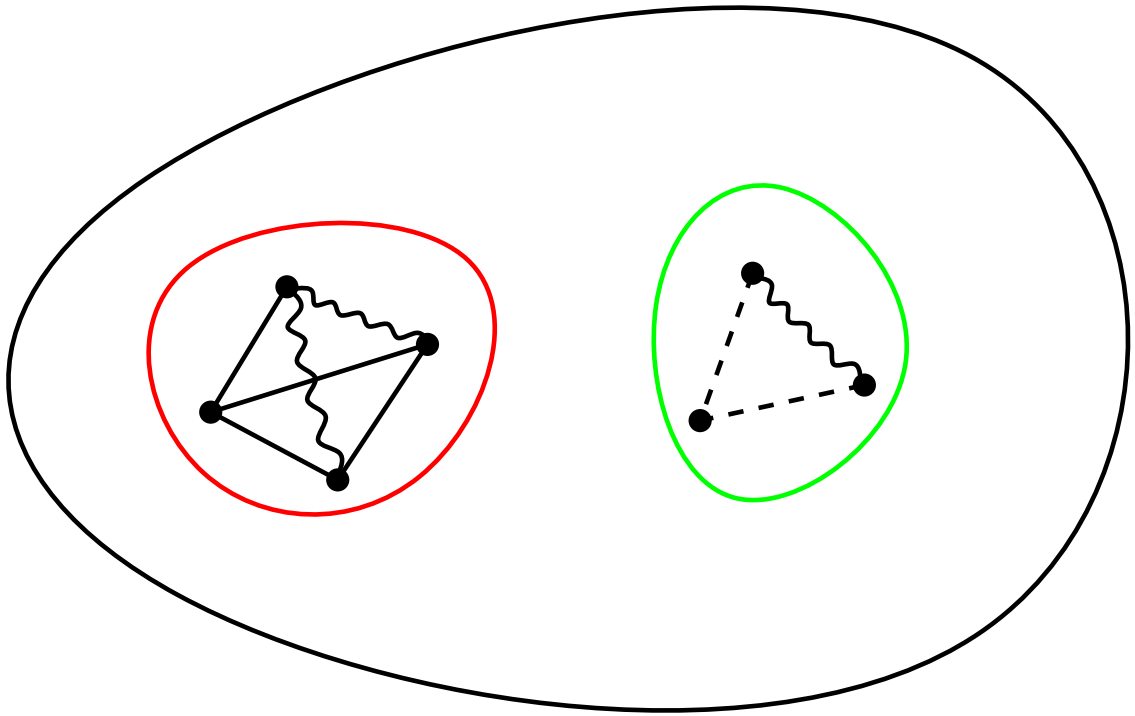
Trigraphes [Chudnovsky 2006]

Un trigraphe est constitué d'un ensemble de sommets V, et entre chaque paire de sommets u et v, il y a soit :

- Une arête forte : u ●——● v
- Une non-arête forte : u ●- - - -● v ou u ● ● v
- Une arête non-determinée (qui peut servir à la fois d'arête ou de non-arête) : u ●~~~● v

Un trigraphe a un trou si l'on peut choisir les arêtes non-déterminées de façon à créer un trou. Un trigraphe T est de Berge si ni T ni $\overline{T}$ n'ont de trous impairs.

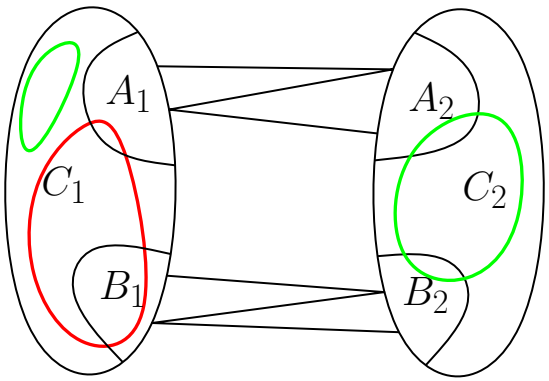
Clique-Stable séparation dans les trigraphes :
Une clique (resp. un stable) peut contenir des arêtes non-déterminées.

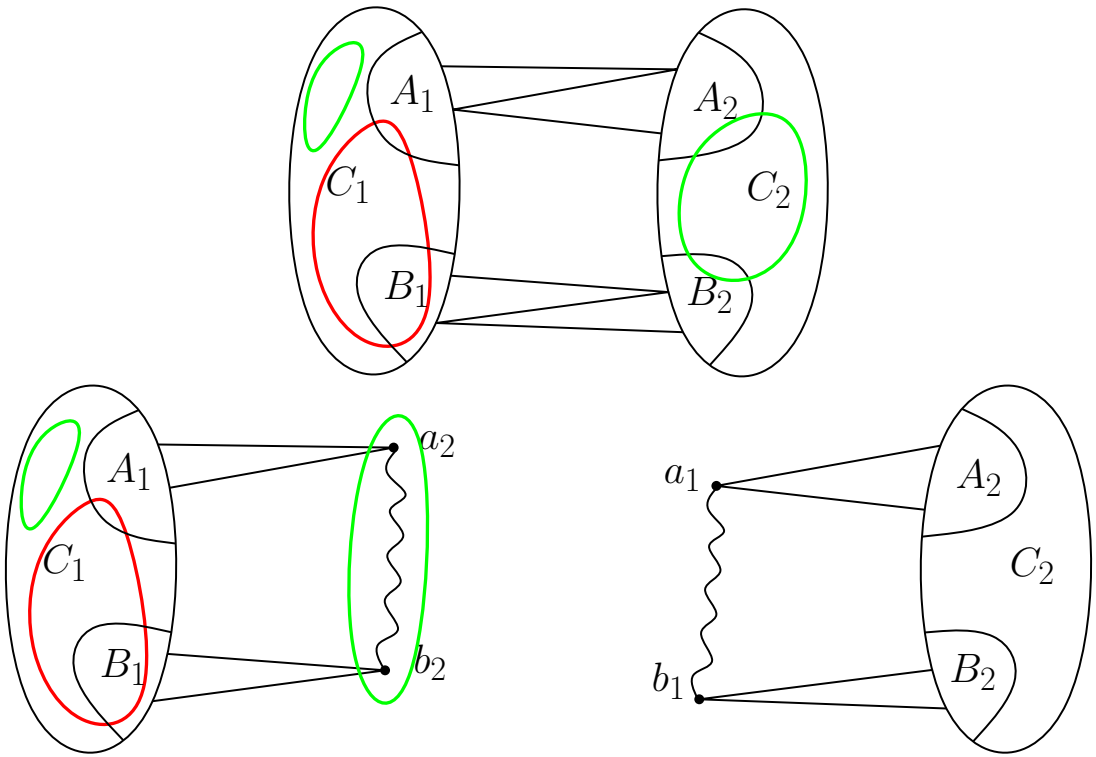


Décomposition [Chudnovsky 2006]

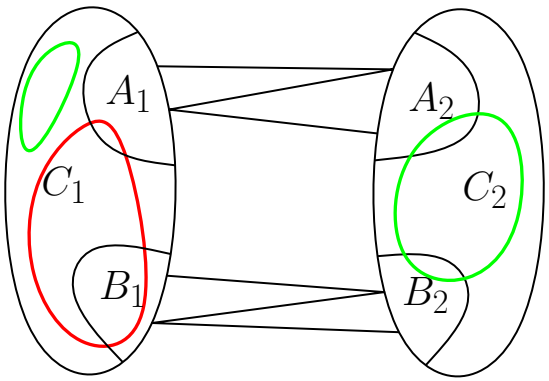
Si un trigraphe T est de Berge, alors pour T ou $\overline{T}$:

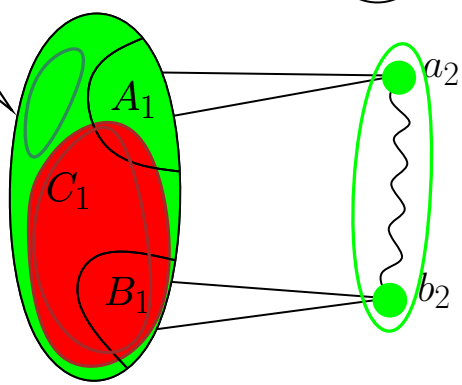
- Soit c'est un trigraphe basique : biparti, line trigraphe, ou doublé.
- Soit il admet un 2-joint
- Soit il admet une partition antisymétrique paire (*balanced skew partition*)

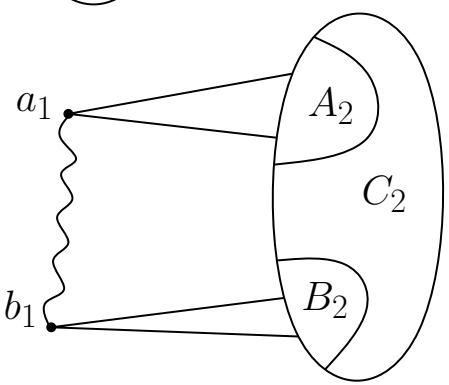

A_1
A_2
C_1
C_2
B_1
B_2


A_1
A_2
C_1
C_2
B_1
B_2
a_2
b_2
a_1
b_1

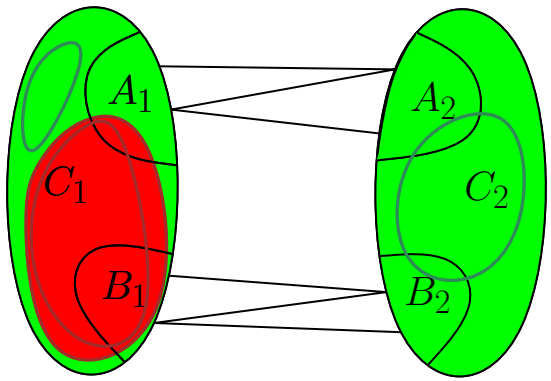
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)

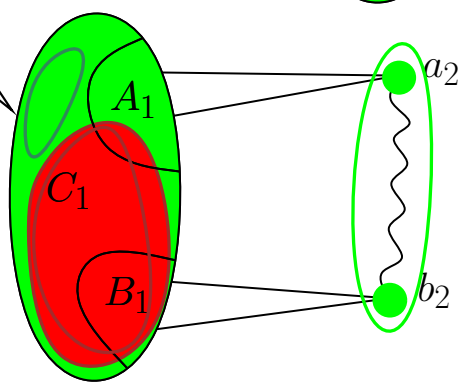


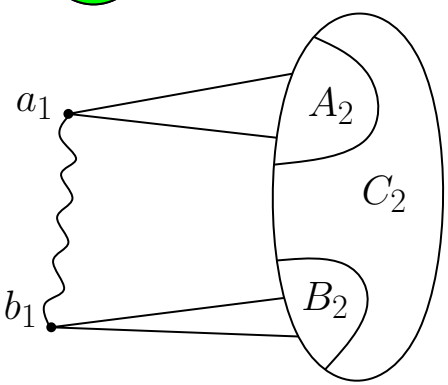




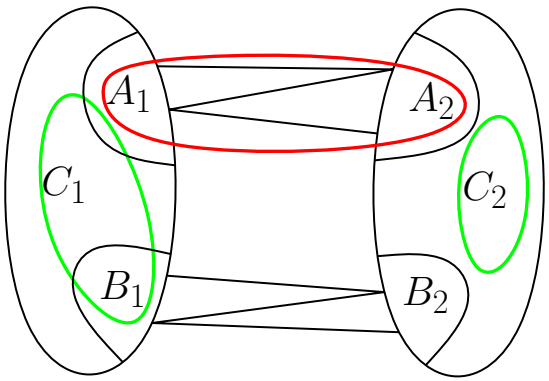
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)

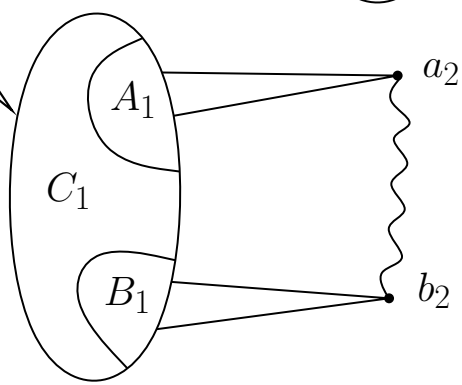


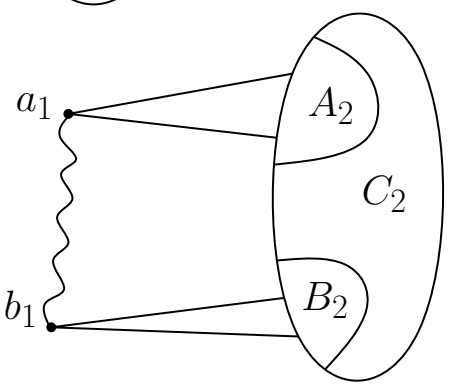




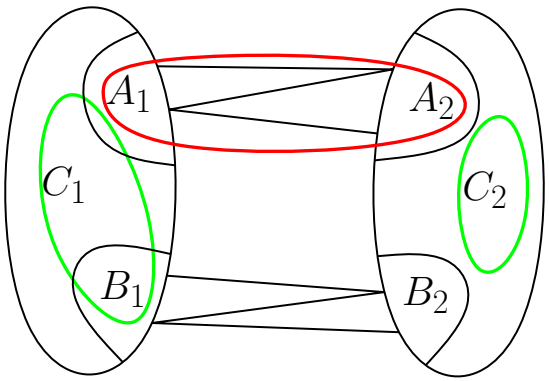
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)

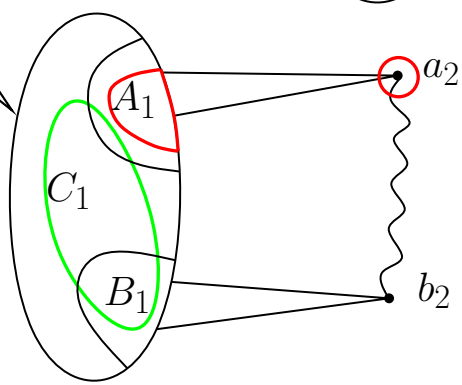


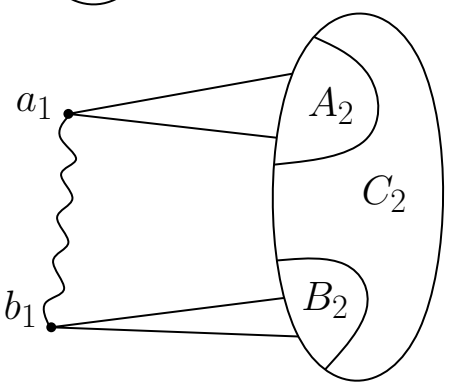




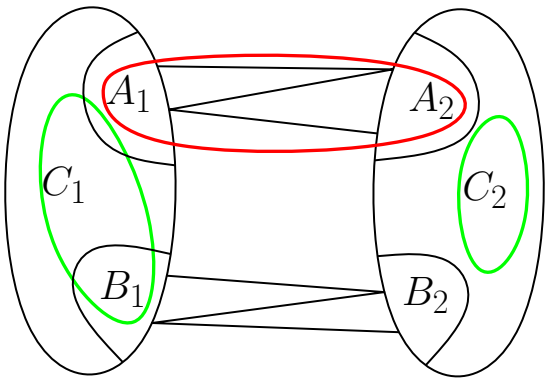
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)

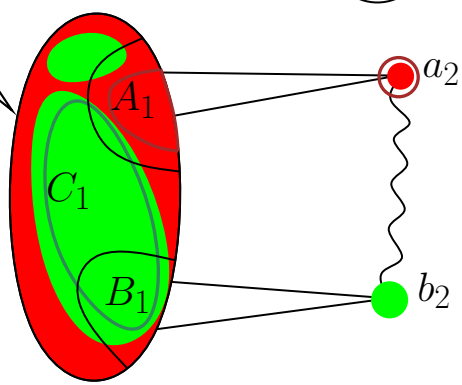


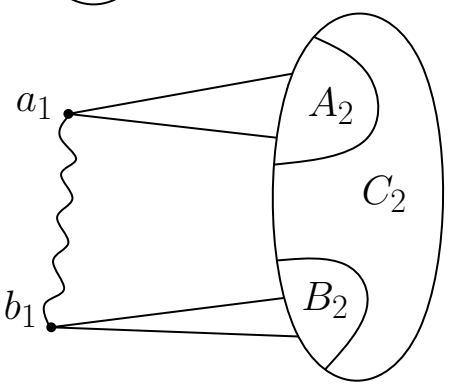




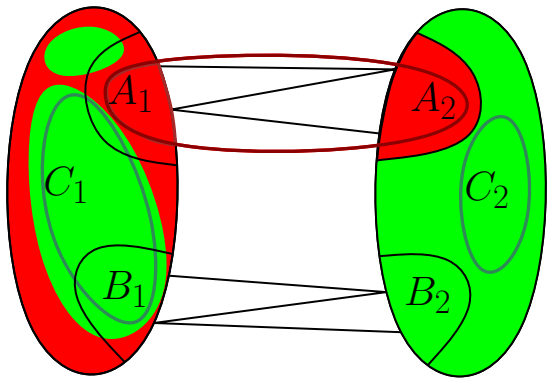
Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)

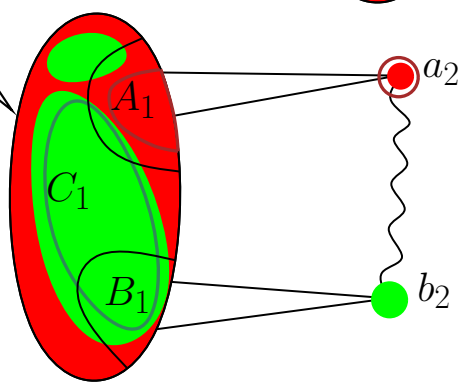


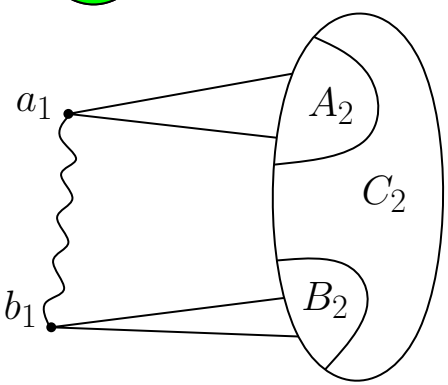




Rouge=
Ce qui est mis à gauche (côté clique)
Vert=
Ce qui est mis à droite (côté stable)







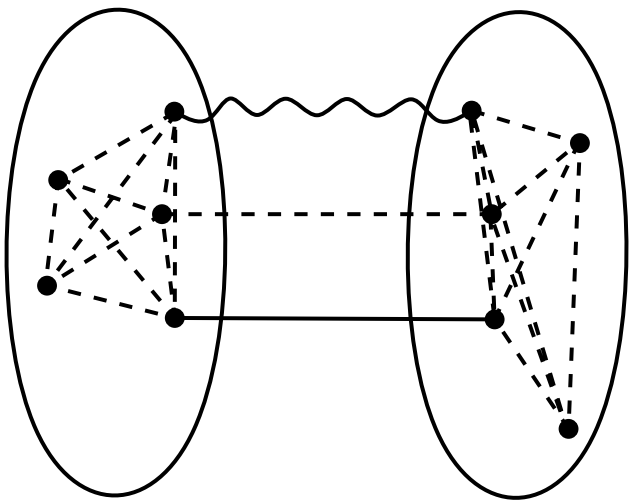
$\Rightarrow$ Si $n = n_g + n_d$:

$$\begin{aligned} |\text{CS-sép pour } G| &\leq |\text{CS-sép bloc gauche}| + |\text{CS-sep bloc droit}| \\ &\leq c.(n_g + 3)^2 + c.(n_d + 3)^2 \\ &\leq c.n^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Il suffit de montrer qu'il existe un Clique-Stable séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$ pour chaque graphe basique.

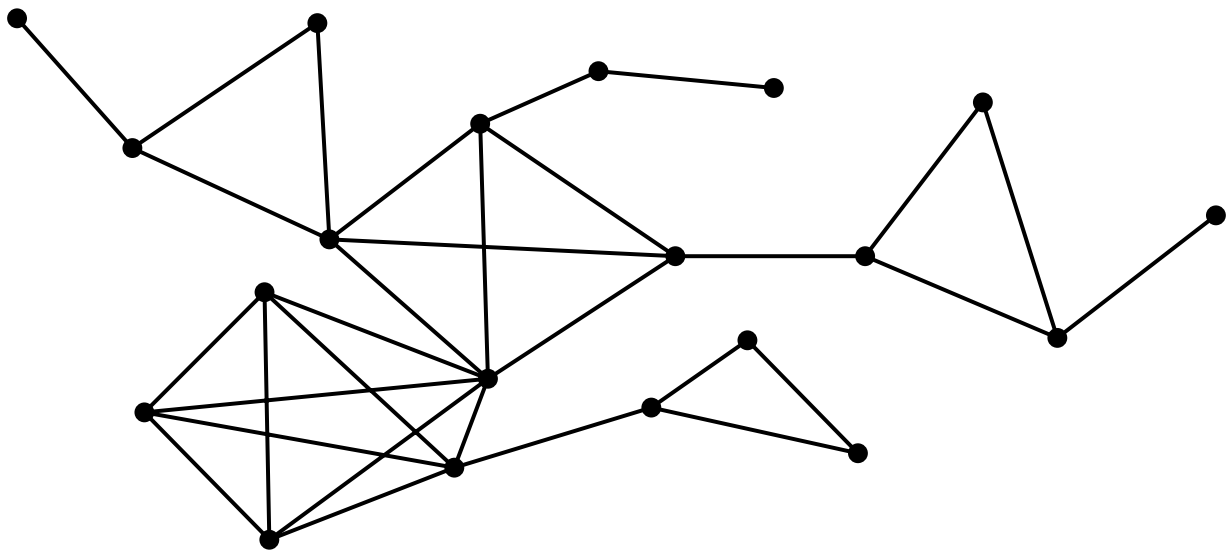
Dans les graphes basiques :

- Dans un trigraphe biparti, ω est borné par 2.
  $\Rightarrow$ CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$.



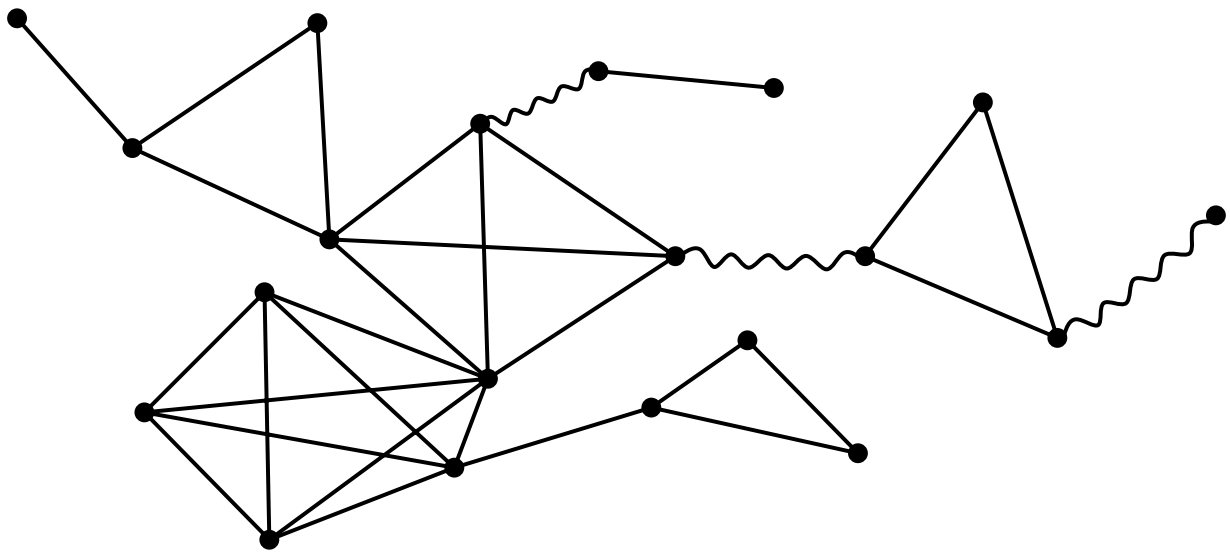
Dans les graphes basiques :

- Dans un trigraphe biparti, ω est borné par 2.
  $\Rightarrow$ CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$.
- Un line trigaphe est obtenu à partir d'un line graphe de biparti G dont on a changé certaines arêtes en arêtes indéterminées.
  Une clique est une clique du graphe original donc il y a un nombre linéaire de cliques maximales.

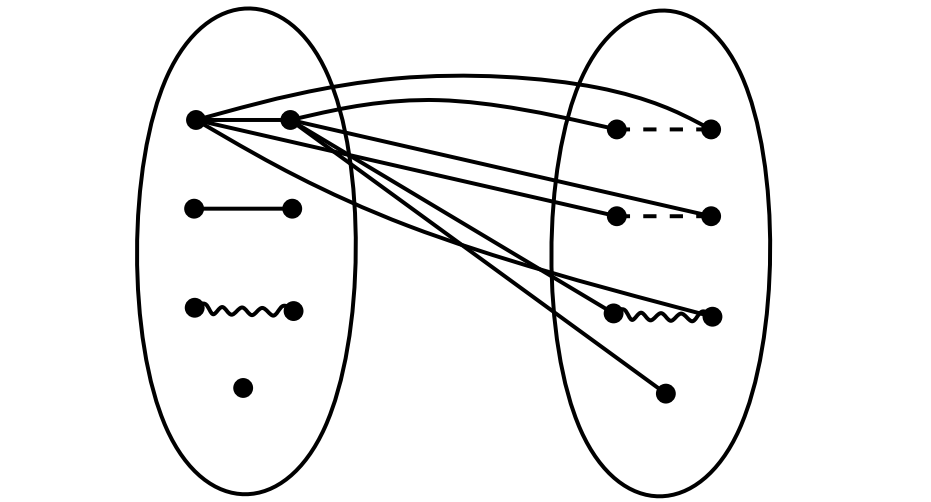


Dans les graphes basiques :

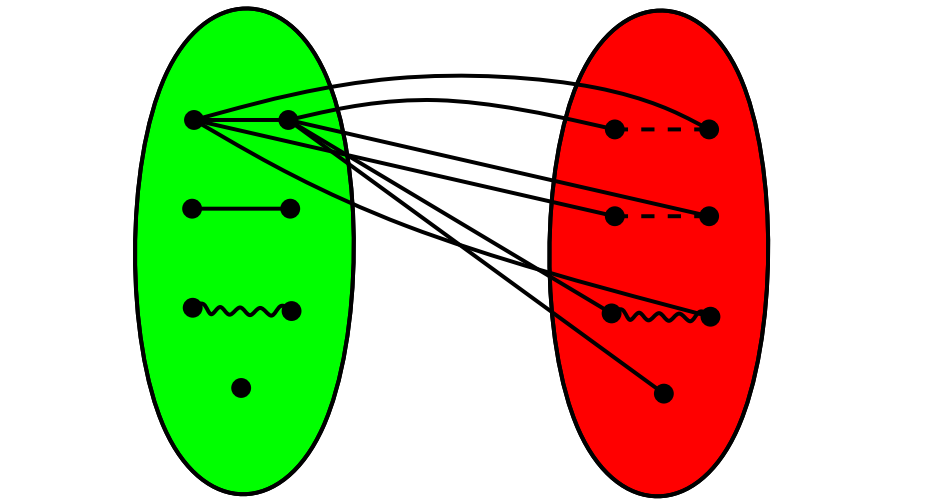
- Dans un trigraphe biparti, ω est borné par 2.
  $\Rightarrow$ CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$.
- Un line trigaphe est obtenu à partir d'un line graphe de biparti G dont on a changé certaines arêtes en arêtes indéterminées.
  Une clique est une clique du graphe original donc il y a un nombre linéaire de cliques maximales.



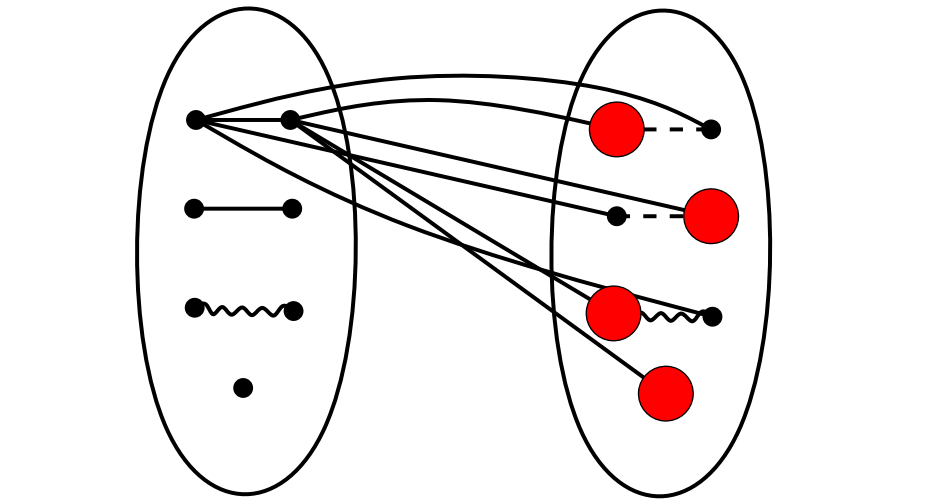
- Dans un trigraphe doublé : on peut couper toutes les cliques de taille 2 et tous les stables de taille 2 en $\mathcal{O}(n^2)$. Pour les autres :



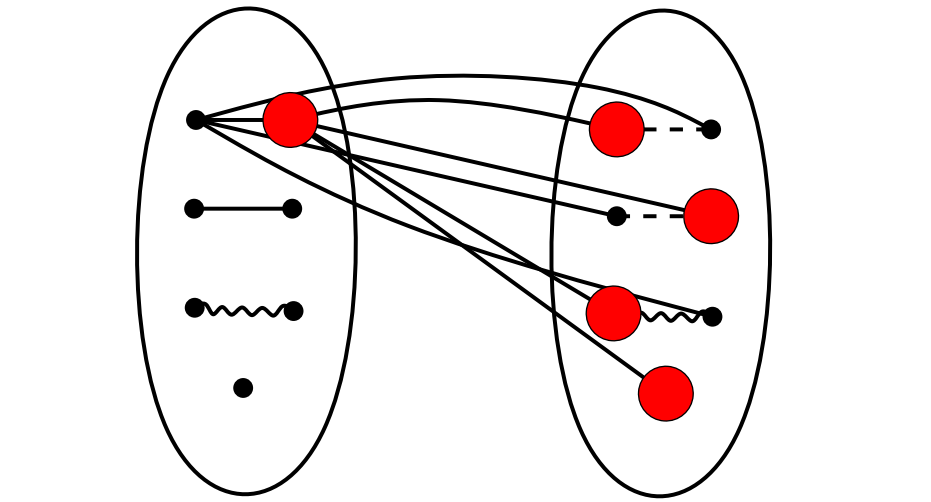
- Dans un trigraphe doublé : on peut couper toutes les cliques de taille 2 et tous les stables de taille 2 en $\mathcal{O}(n^2)$. Pour les autres :



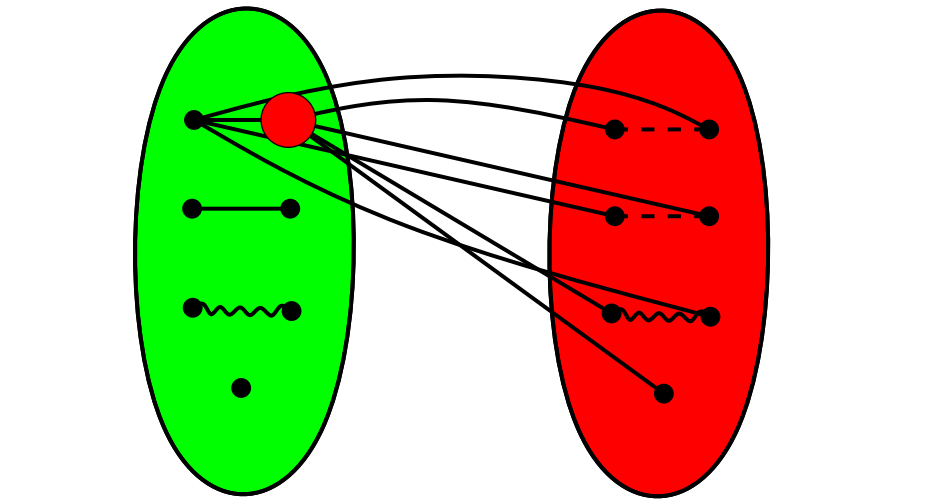
- Dans un trigraphe doublé : on peut couper toutes les cliques de taille 2 et tous les stables de taille 2 en $\mathcal{O}(n^2)$. Pour les autres :



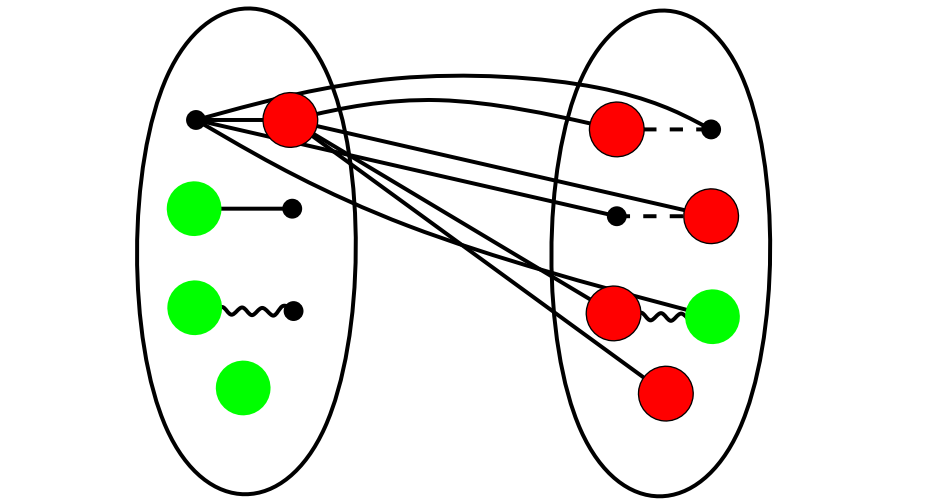
- Dans un trigraphe doublé : on peut couper toutes les cliques de taille 2 et tous les stables de taille 2 en $\mathcal{O}(n^2)$. Pour les autres :



- Dans un trigraphe doublé : on peut couper toutes les cliques de taille 2 et tous les stables de taille 2 en $\mathcal{O}(n^2)$. Pour les autres :

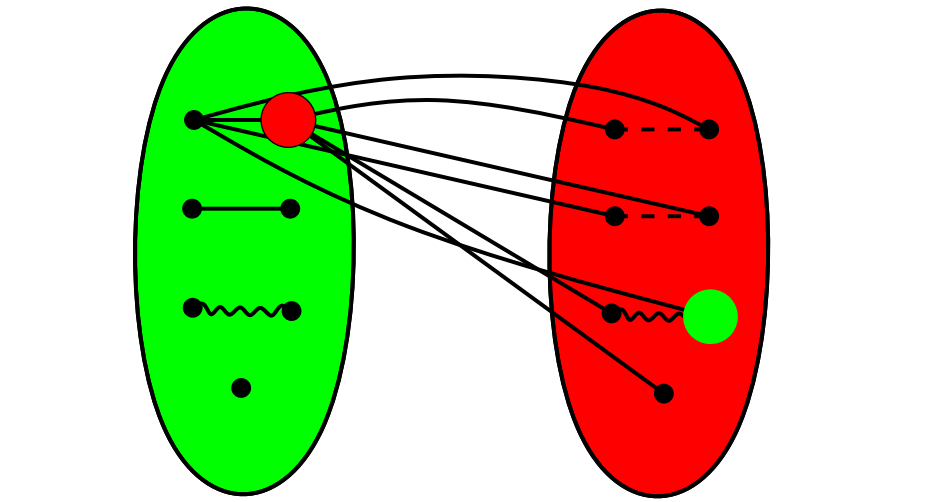


- Dans un trigraphe doublé : on peut couper toutes les cliques de taille 2 et tous les stables de taille 2 en $\mathcal{O}(n^2)$. Pour les autres :



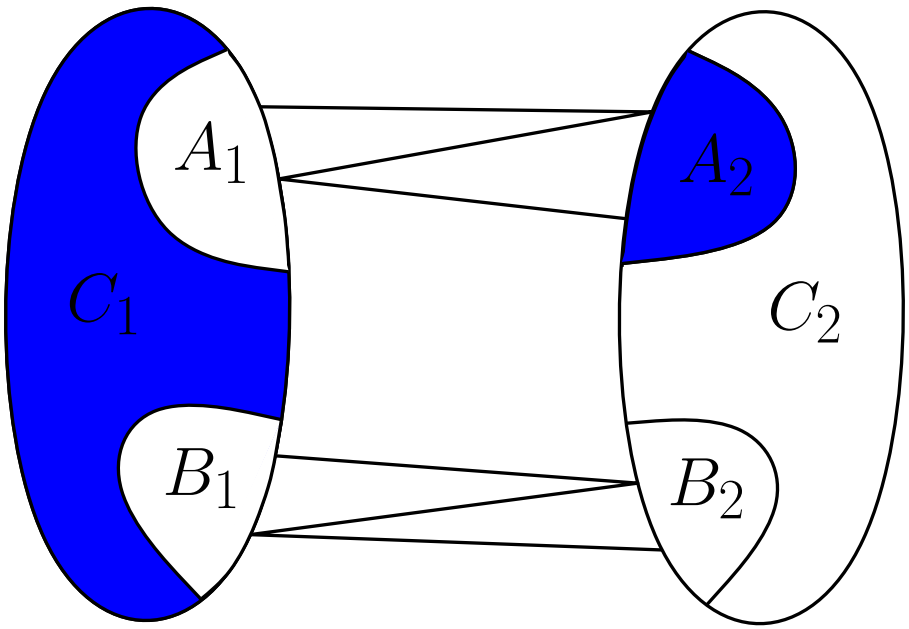
+ toutes les non-arêtes + toutes les arêtes

- Dans un trigraphe doublé : on peut couper toutes les cliques de taille 2 et tous les stables de taille 2 en $\mathcal{O}(n^2)$. Pour les autres :

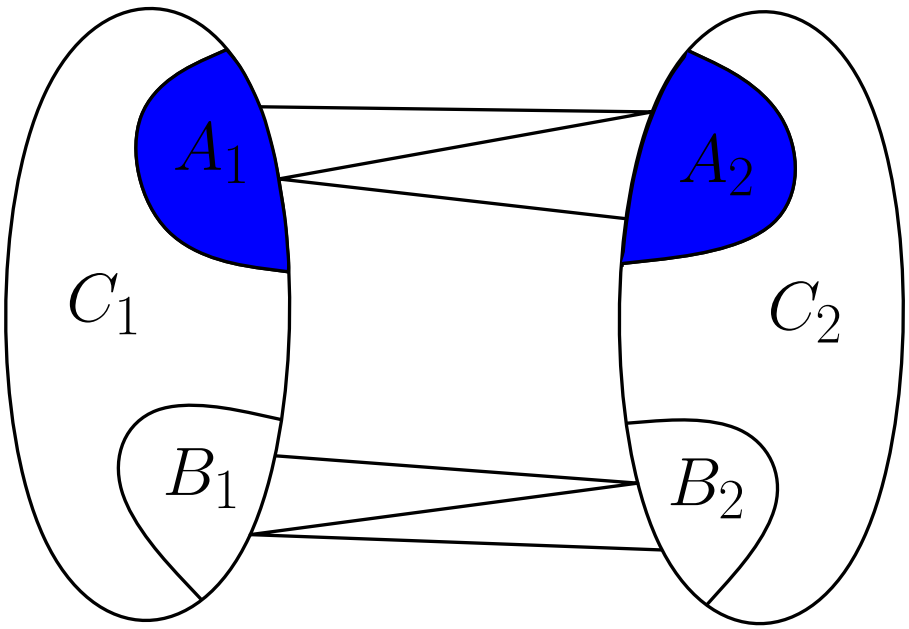


Généraliser l'opération de 2-joint ?

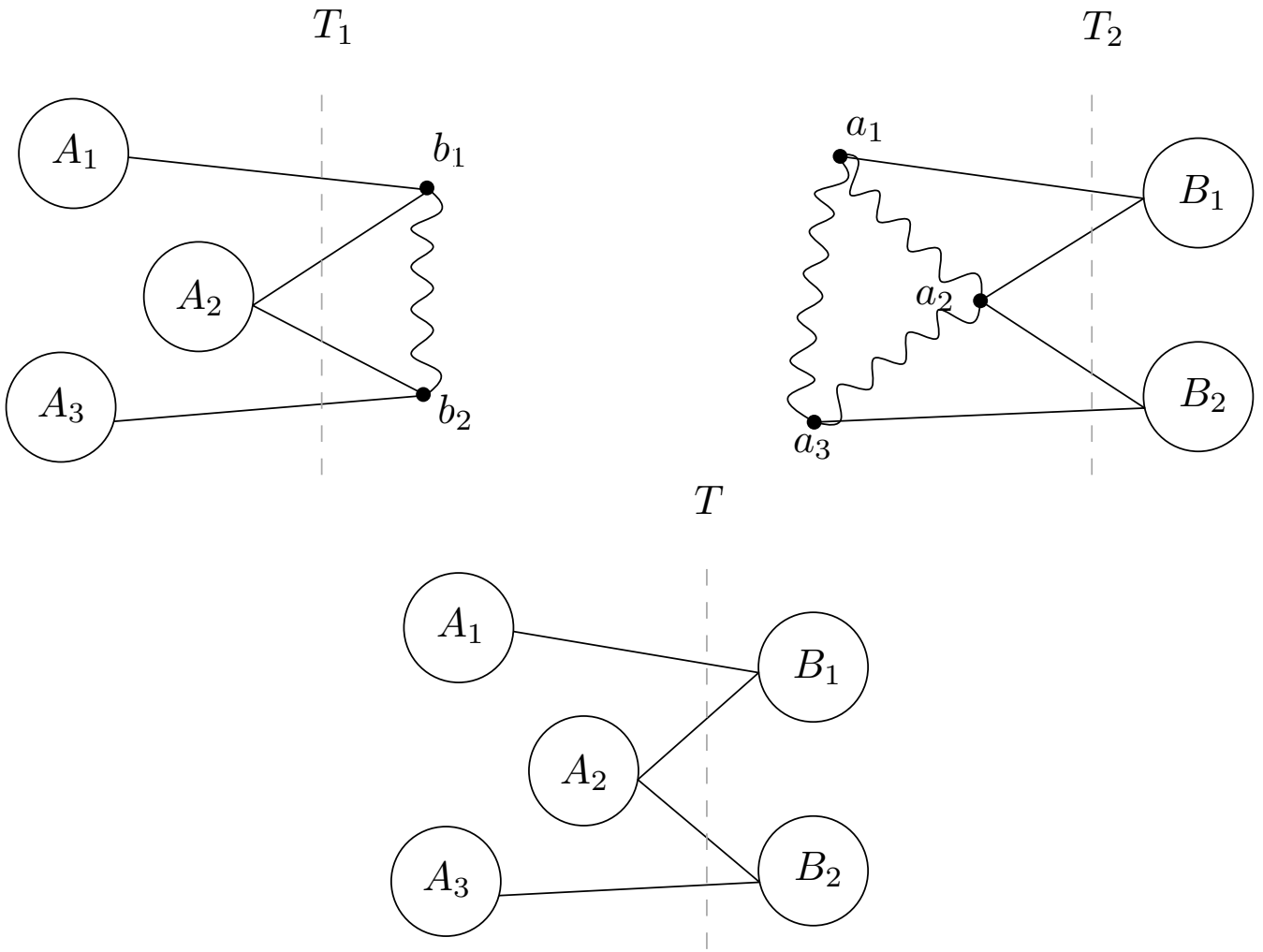
Généraliser l'opération de 2-joint ?



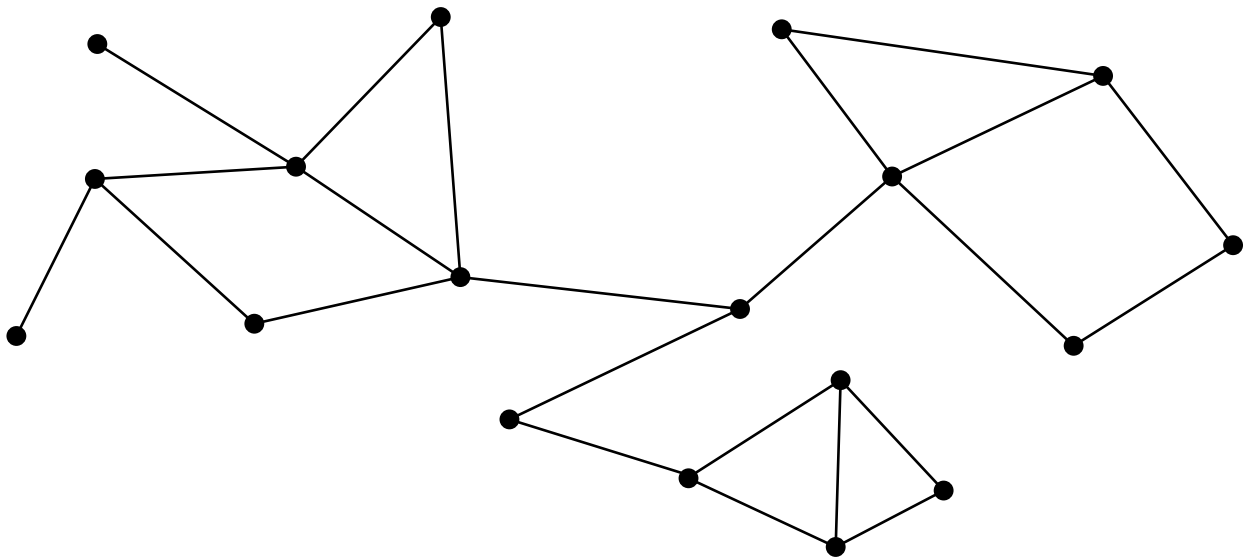
Généraliser l'opération de 2-joint ?



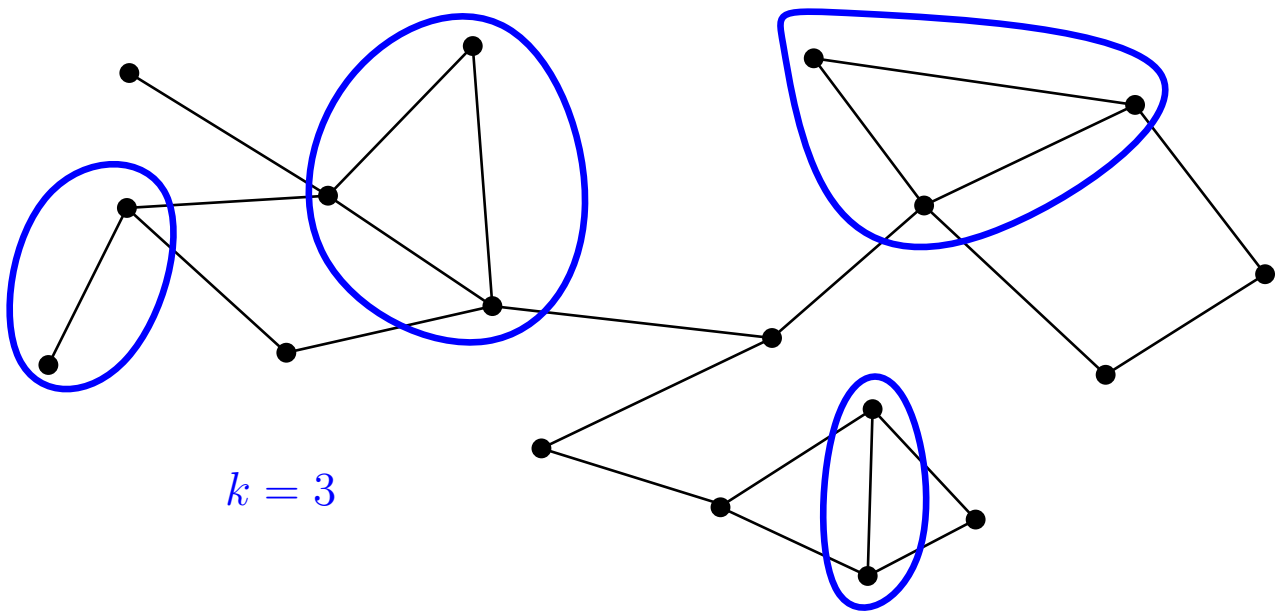
Généraliser l'opération de 2-joint ? $\Rightarrow$ k-joint



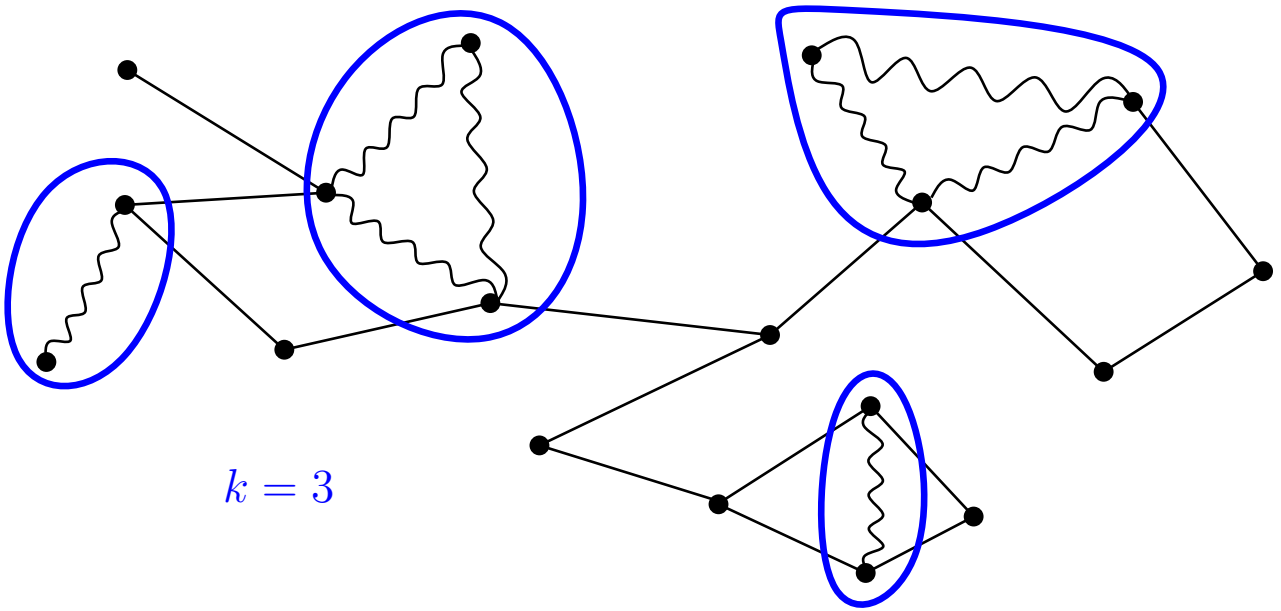
Comment passer d'une classe de graphes à une classe de trigraphes ?



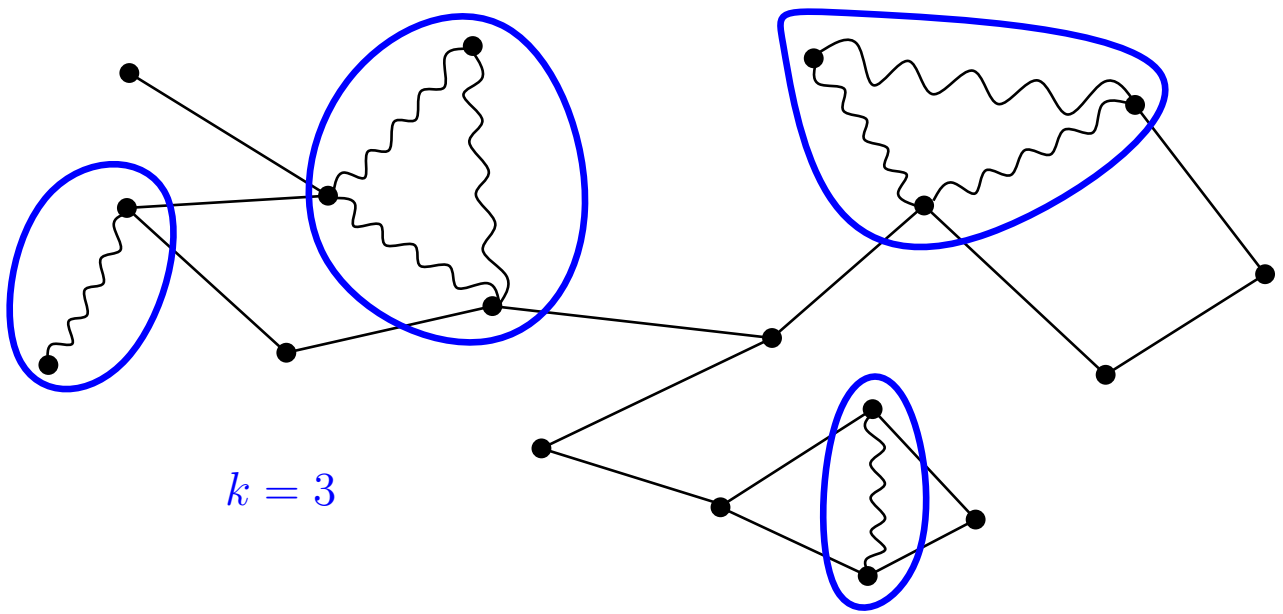
Comment passer d'une classe de graphes à une classe de trigraphes ?



Comment passer d'une classe de graphes à une classe de trigraphes ?



Comment passer d'une classe de graphes à une classe de trigraphes ?

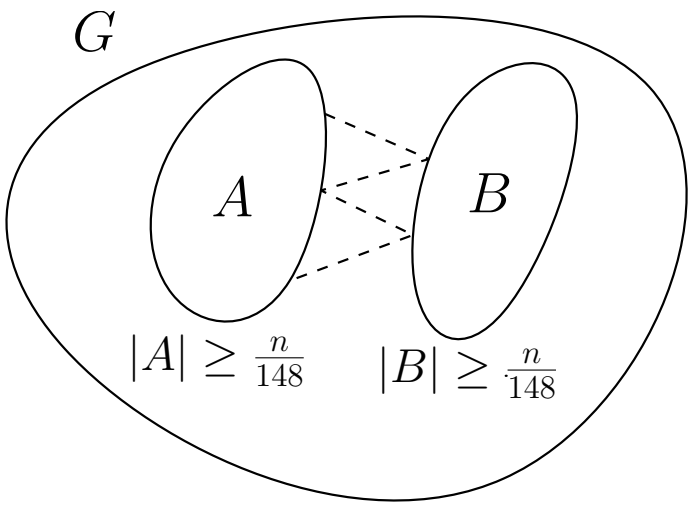


Clôture par k-joint [L., Trunck 2013]

Soit $\mathcal{C}$ une classe de graphes admettant un CS-séparateur de taille $\mathcal{O}(n^c)$ pour chaque graphe. Alors la classe $\mathcal{C}'$ de trigraphes correspondante, close par k-joint, admet un CS-separateur de taille polynomiale ($\mathcal{O}(n^{k^2 c})$).

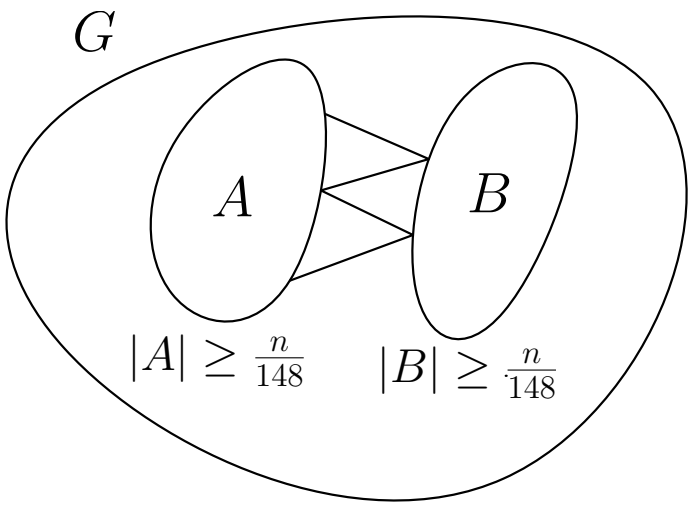
Propriété ♢ [L., Trunck 2013]

Tout trigraphe sans partition antisymétrique paire admet deux ensembles de sommets A et B de taille au moins $n/148$, avec A complètement antiadjacent à B ou complètement adjacent à B.



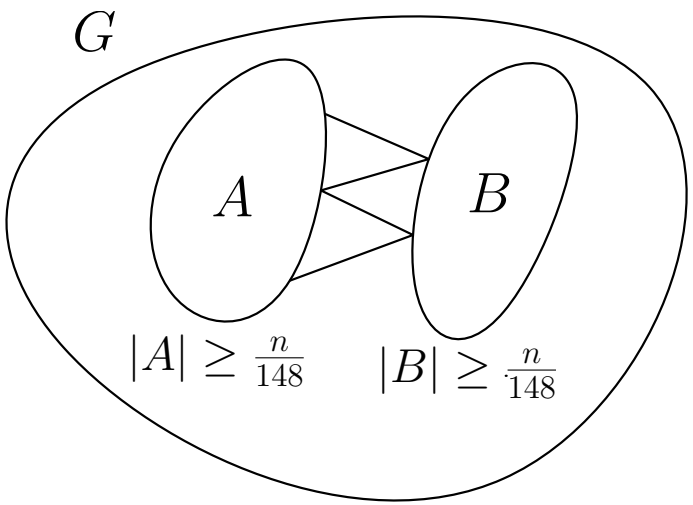
Propriété ♢ [L., Trunck 2013]

Tout trigraphe sans partition antisymétrique paire admet deux ensembles de sommets A et B de taille au moins $n/148$, avec A complètement antiadjacent à B ou complètement adjacent à B.



Propriété ♢ [L., Trunck 2013]

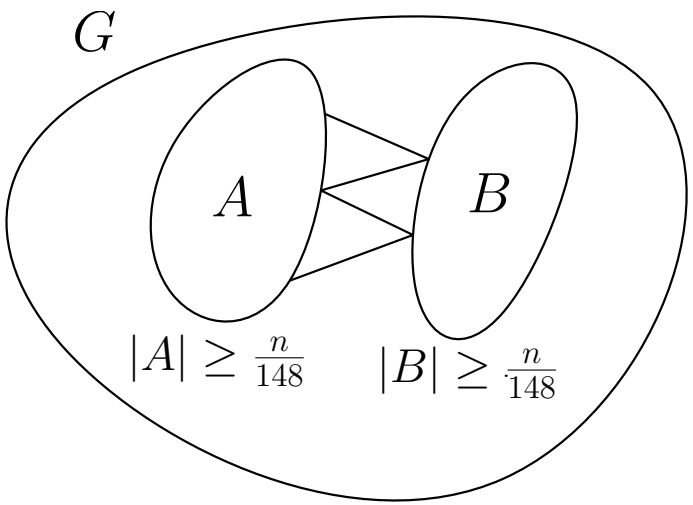
Tout trigraphe sans partition antisymétrique paire admet deux ensembles de sommets A et B de taille au moins $n/148$, avec A complètement antiadjacent à B ou complètement adjacent à B.



Malheureusement, la classe n'est pas close par sous-graphe induit, donc la propriété ♢ n'implique pas la Clique-Stable séparation (ni EH, mais EH est triviale sur les graphes parfaits)...

Propriété ♢ [L., Trunck 2013]

Tout trigraphe sans partition antisymétrique paire admet deux ensembles de sommets A et B de taille au moins $n/148$, avec A complètement antiadjacent à B ou complètement adjacent à B.



Malheureusement, la classe n'est pas close par sous-graphe induit, donc la propriété ♢ n'implique pas la Clique-Stable séparation (ni EH, mais EH est triviale sur les graphes parfaits)...

Mais il existe des graphes parfaits qui ne vérifie pas la propriété ♢ $\Rightarrow$ les graphes parfaits sans partition antisymétrique paire sont vraiment "plus structurés".

Perspectives

- Etudier la Clique-Stable séparation sur d'autres classes de graphes (graphes parfaits ?)
- Prouver qu'il n'existe pas de Clique-Stable séparateur polynomial en général ?
- Quels sont les liens entre la Clique-Stable séparation et les autres propriétés des classes de graphes ? (Erdős-Hajnal par exemple)

Perspectives

- Etudier la Clique-Stable séparation sur d'autres classes de graphes (graphes parfaits ?)
- Prouver qu'il n'existe pas de Clique-Stable séparateur polynomial en général ?
- Quels sont les liens entre la Clique-Stable séparation et les autres propriétés des classes de graphes ? (Erdős-Hajnal par exemple)

Merci pour votre attention !