TD 1

Exercice 1 : Les tomates c'est fini !
Donner des automates finis qui reconnaissent les langages suivants
- $L_1 = \emptyset$
- $L_2 = \{\epsilon\}$
- $L_3 = \{0^n 1^m | n, m \geq 0\}$
- $L_4 = \{x \in \{0,1\}^* |\ x$ se termine par $101\}$
- $L_5 = \{x \in \{0,1\}^* |\ |x|_0$ pair et $|x|_1$ impair $\}$
- L_6 est l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la $i^{ième}$ lettre en partant de la fin est un a.
- $L_7 = \{0^{n_1} 1^{m_1} 0^{n_2} 1^{m_2} \dots 0^{n_k} 1^{m_k} |\ \ k \geq 0$ et $\forall i,\ 1 \leq i \leq k,\ n_i, m_i > 0\}$
- $L_8 = \{\omega \in \{0,1\}^* \mid$ chaque bloc de ω de trois lettres consécutives contient au moins deux zéros$\}$.
- $L_9 = (00+1)^*(11+0)^*$

Montrer que le langage suivant est rationnel :
$L_{10} = \{a^i \mid$ Le chiffre 7 apparaît i fois consécutives dans le développement de π en base 10$\}$

Exercice 2 : Retour au CE2
1 - On définit x^R comme le mot x écrit à l'envers et pour tout langage L, on définit $L^R = \{\omega^R | \omega \in L\}$. Montrer que si L est rationnel alors L^R est aussi rationnel.
2 - Soit

$$\sum\nolimits_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\sum_3$ contient toutes le colonnes de taille 3 de 0s et de 1s. Une chaîne de symboles de $\sum_3$ donne ainsi 3 lignes de 0s et de 1s. Considérons chaque ligne comme un nombre binaire et posons

$$B = \{\omega \in \Sigma_3^* |\ \text{la ligne du bas de } \omega \text{ est la somme des deux lignes supérieures}\}.$$

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in B, \text{ mais } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin B.$$

Montrer que B est rationnel.
3 - Soit

$$\sum\nolimits_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

De même chaque mot sur $\sum_2^*$ forme deux mots sur $\{0,1\}^*$. Posons,

$$C = \{\omega \in \Sigma_2^* |\ \text{la ligne du bas de } \omega \text{ est trois fois la ligne du haut}\}$$

$$D = \{\omega \in \Sigma_3^* |\ \text{la ligne du haut de } \omega \text{ est supérieure à la ligne du bas}\}.$$

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in C, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in D,$$

$$\text{mais } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin C, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin D.$$

Montrer que C et D sont rationnels.

Exercice 3 : C'est la taille qui compte
Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme $\{c + ip, i \in N\}$. Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires. Soit $L \subseteq a^*$ un langage rationnel, montrer que $\{i, a^i \in L\}$ est semi-linéaire.
En déduire que pour tout langage L rationnel, l'ensemble $\lambda(L) = \{|w|, w \in L\}$ est semi-linéaire.

Exercice 4 : Il faut savoir raison garder
Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Montrer que les langages suivants sont rationnels.
1 - MAX(L) = $\{x \in L |\ \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
2 - MIN(L) = $\{x \in L |$ aucun préfixe propre de x n'est dans $L\}$
3 - INIT(L) = $\{x \in \Sigma^* |\ \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$
4 - CYCLE(L) = $\{x_1x_2 |\ x_1, x_2 \in \Sigma^*$ et $x_2x_1 \in L\}$