TD 7 – Machines de Turing

Exercice 1. *Caisse à outils*

Trouvez vous-même un tas d'outils très utiles !

1. Donner une bijection b de $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$.

2. Donner une bijection de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$, de $\mathbb{N}^4$ dans $\mathbb{N}$...
3. Donner une bijection ξ de $\mathbb{N}^*$ (l'ensemble des suites finies d'entiers) dans $\mathbb{N}$. Note : On pourra se baser sur le fait que tout entier naturel $n \notin \{0,1\}$ a une décomposition en produit de facteurs premiers.
4. Prouvez qu'il n'existe pas de bijection entre l'ensemble $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites infinies de $\{0,1\}$ et $\mathbb{N}$. En déduire qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$.

Exercice 2. *Vers l'infini et au-delà !*

Pour s'échauffer :

1. Construire une machine de Turing M qui écrit 0 1 0 1 0 1 0 ... sur un ruban blanc.

Pour ceux qui douteraient de l'intérêt de cette question, s'adresser à A. Turing.

Passons aux choses sérieuses :

On définit un nouveau modèle de machine de Turing fonctionnant avec un ruban infini *des deux côtés*, c'est à dire qu'à l'état initial l'entrée est écrite quelque part sur le ruban, et il n'y a que des blancs partout ailleurs sur le ruban infini. (Formellement, on peut dire que les cases du ruban sont indexées par $\mathbb{Z}$ au lieu d'être indexées par $\mathbb{N}$ pour un ruban classique, infini à droite).

2. Donner l'intuition pour qu'une telle machine de Turing avec ruban infini des deux côtés peut être simulée par une machine de Turing avec ruban infini à droite, et vice versa.

Exercice 3. *Je te lis ♫ tu me lis ♪ . . .*

Construisez les machines de Turing suivantes :

1. M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui multiplie par 2 son entrée binaire.
2. M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui multiplie par 2 et ajoute 1 à son entrée binaire.
3. M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui ajoute 1 à son entrée binaire.
4. M qui accepte $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.
5. M qui code en binaire son entrée unaire.

Exercice 4. *Ou tu veux ou tu veux pas.*

Soit $\Sigma = \{0,1\}$ un alphabet et soit x un mot de Σ^*. Construire des machines de Turing telles que :

1. lisant x la machine écrit x^{-1} (x écrit à l'envers)

2. la machine accepte x ssi x s'écrit yy^{-1} pour un certain $y \in \Sigma^*$.
3. la machine accepte x ssi x s'écrit yy pour un certain $y \in \Sigma^*$.

Exercice 5. *L'école primaire d'Alan*

Construire une machine de Turing qui effectue :

1. L'addition de deux entiers.
2. La multiplication de deux entiers.
3. La composition de deux fonctions, étant données les machines calculant chacune des fonctions.