TD 8 – Décidabilité

Exercice 1. *Pas besoin de lunettes pour voir en 4D.*

Supposons qu'une machine de Turing s'arrête au bout de t étapes de calcul en consommant s cases mémoires (par *consommées*, on entend les cases mémoires qui sont parcourues pendant le calcul).

✎ Quelle(s) relation(s) existent entre t et s ?

Exercice 2. *r. ? r.e. ? co r.e. ?*

On fixe un alphabet fini Σ contenant entre autre les lettres a et b. ϵ désignera le mot vide. Posons Σ^* l'ensemble des mots finis sur Σ. On notera enfin M_σ avec $\sigma \in \Sigma^*$ la machine de Turing effectuant le programme de code σ. (Plus formellement, $M_\sigma(x) = U(<\sigma, x>)$)

✎ Que peut-on dire d'un langage qui est reconnaissable et qui est de complémentaire reconnaissable.

✎ Les ensembles suivants sont-ils décidables ? reconnaissables ? de complémentaire reconnaissable ?

1. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(\sigma) \text{ s'arrête}\}$
2. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(\epsilon) \text{ s'arrête}\}$
3. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(abba) \text{ est défini}\}$
4. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(ab)^\frown M_\sigma(ba) = aaa\}$ (avec $^\frown$ l'opérateur de concaténation)
5. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(x) = x \text{ si } M_x(x) \text{ s'arrête et } b \text{ sinon}\}$
6. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_w(\sigma) = abb \text{ avec } w \in \Sigma^*\}$
7. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma \text{ ne s'arrête sur aucun mot dont } \sigma \text{ est un préfixe}\}$
8. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(\sigma) = \sigma\}$
9. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma \text{ s'arrête sur une partie infinie de } \Sigma^*\}$

Exercice 3. *PCP*

Σ est un alphabet fini et P un ensemble fini de paires de mots sur Σ. Le Problème de Correspondance de Post associé à Σ, P est l'existence d'une suite non vide $(v_i, w_i)_i$ d'éléments de P telle que la concaténation des v_i soit égale à la concaténation des w_i. Le Problème de Correspondance de Post Modifié est celui de l'existence d'une telle suite lorsque le premier terme est fixé.

1. Résoudre PCP pour les instances suivantes :
   1. $P = (aab, ab), (bab, ba), (aab, abab)$
   2. $P = (a, ab), (ba, aba), (b, aba), (bba, b)$
   3. $P = (ab, bb), (aa, ba), (ab, abb), (bb, bab)$
   4. $P = (a, abb), (aab, b), (b, aa), (bb, bba)$
2. Montrer que si Σ ne contient qu'une lettre le problème est décidable.

3. Montrer l'équivalence entre PCP et PCPM.
4. Peut-on se passer des couples de la forme (w, w) dans PCPM ?
5. Montrer que PCP est indécidable.

Exercice 4. *Il ne faut pas dépasser !*

Une machine de Turing est dite *linéairement bornée* si elle n'écrit pas en dehors de l'espace utilisé par la donnée.

Comme on peut toujours supposer qu'une machine de Turing n'écrit pas le symbole blanc $\sqcup$ (en le dupliquant éventuellement en un autre symbole $\sqcup_2$), on peut aussi dire qu'une machine linéairement bornée est une machine telle que si $\delta(p, \sqcup) \ni (q, b, x)$ est une transition alors $b = \sqcup$ et $x = \leftarrow$. Ceci empêche la machine de modifier les symboles blancs présents sur la bande.

1. Etant donné un mot w et une machine linéairement bornée M, peut-on décider si M accepte w ?
2. Etant donné une machine linéairement bornée M, peut-on décider si M n'accepte aucun mot, c'est-à-dire $L(M) = \emptyset$?

   Indice : On pourra commencer par montrer que ce problème est indédidable pour les machines de Turing en général.