
TD 08 – NP-complétude bis

Exercice 1.*Vertex Cover avec degré pair*

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une *couverture de sommets* de taille k est un sous-ensemble de sommets V' de taille k tel que pour toute arête $uv \in E$, on a $u \in V'$ ou $v \in V'$ (ou les deux). Autrement dit, les sommets choisis "couvrent" toutes les arêtes du graphe.

Montrer que le problème suivant est \mathcal{NP} -complet :

VERTEX COVER AVEC DEGRÉ PAIR

Instance : Un graphe $G = (V, E)$ dont tous les sommets sont de degré pair, et $k \geq 1$ un entier.

Question : Existe-t-il une couverture de sommets de G de taille inférieure ou égale à k ?

Exercice 2.*Hamiltonien*

On définit le problème suivant :

HAMILTONIAN CYCLE (HC)

Instance : Un graphe $G = (V, E)$

Question : Existe-t-il un cycle qui passe par chaque sommet une et une seule fois ?

1. Montrer que ce problème appartient à la classe NP.
2. Dans le problème SAT, montrer qu'on peut supposer sans perte de généralité qu'une proposition n'apparaît pas à la fois positivement et négativement dans une clause.

Pour montrer que ce problème est \mathcal{NP} -difficile, on réduit le problème de satisfaisabilité d'une formule CNF au problème de l'existence d'un circuit hamiltonien. Soit $\phi = \bigwedge_{j=1}^m c_j$ une formule CNF construite à partir de propositions p_1, \dots, p_n .

On construit ensuite le graphe indépendant de la formule : les sommets sont $d, f, p_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq 3m + 3$ et les sommets c_j avec $1 \leq j \leq m$. Les arcs de ce graphe sont :

- Les arcs $(d, p_{1,1}), (d, p_{1,3m+3}), (p_{n,1}, f), (p_{n,3m+3}, f), (f, d)$.
- Pour tout $1 \leq i \leq n - 1$, on a les arcs $(p_{i,1}, p_{i+1,1}), (p_{i,1}, p_{i+1,3m+3}), (p_{i,3m+3}, p_{i+1,1}), (p_{i,3m+3}, p_{i+1,3m+3})$.
- Pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq 3m + 2$, on a les arcs $(p_{i,j}, p_{i,j+1}), (p_{i,j+1}, p_{i,j})$.

Ce sous-graphe est représenté sur la figure 1.

On ajoute ensuite les arcs suivant :

- Pour chaque clause j où apparaît positivement p_i , on ajoute $(p_{i,3j}, c_j)$ et $(c_j, p_{i,3j+1})$.
- Pour chaque clause j où apparaît négativement p_i , on ajoute $(p_{i,3j+1}, c_j)$ et $(c_j, p_{i,3j})$.

Ces ajouts sont représentés par la figure 2.

3. En utilisant ce graphe, montrer que le problème HC est \mathcal{NP} -complet.

Exercice 3.*Roue*

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, une roue (non-induite, pour les plus graphieux d'entre vous) de taille K est un ensemble de $K + 1$ sommets w, v_1, v_2, \dots, v_K tels que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pour $1 \leq i < K$, $(v_K, v_1) \in E$ et $(v_i, w) \in E$ pour $1 \leq i \leq K$ (w est le centre de la roue).

Montrer que le problème suivant est \mathcal{NP} -complet :

ROUE

Instance : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier K

Question : Existe-t-il une roue de taille K dans G ?

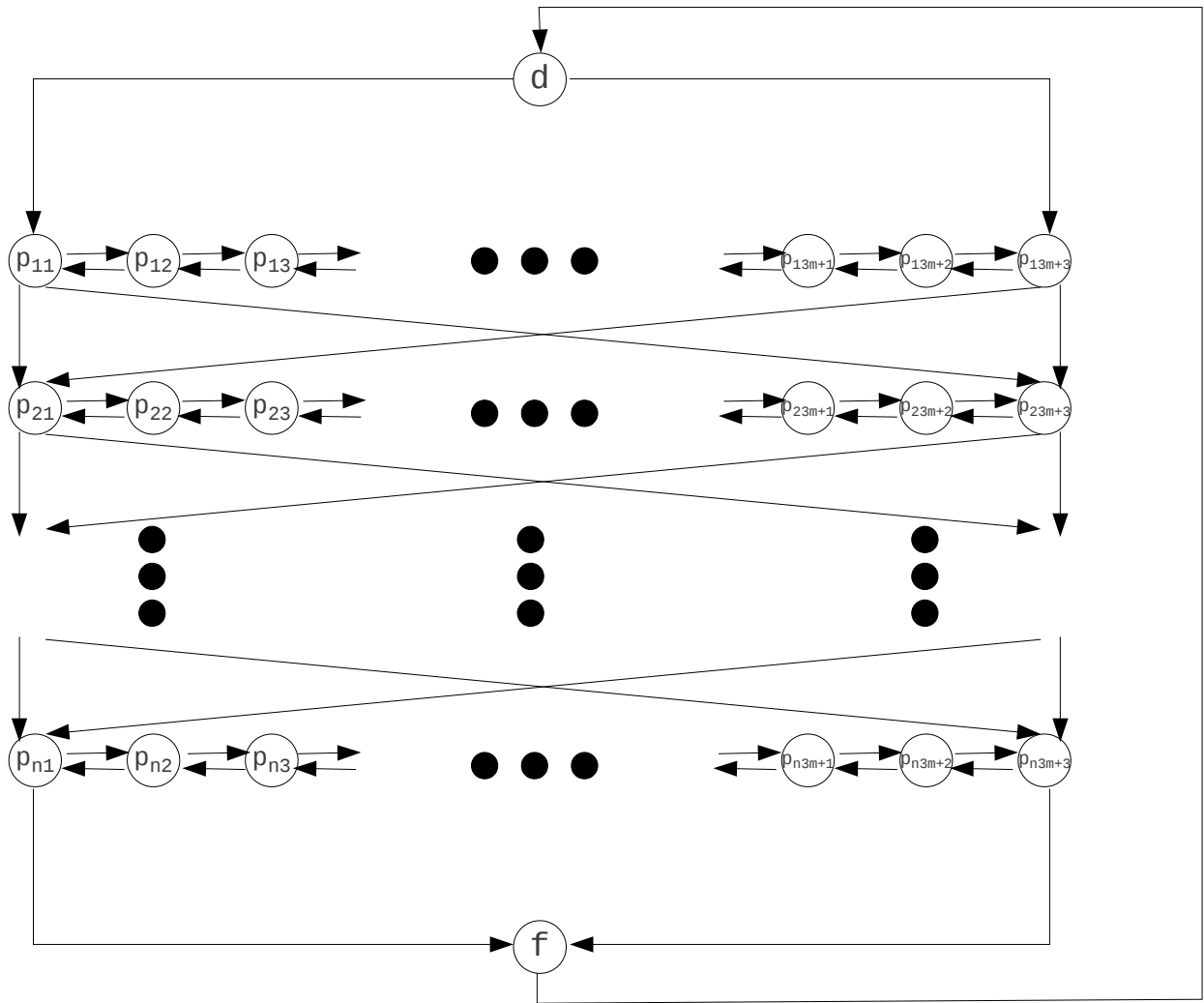


FIGURE 1 – Graphe indépendant de la formule

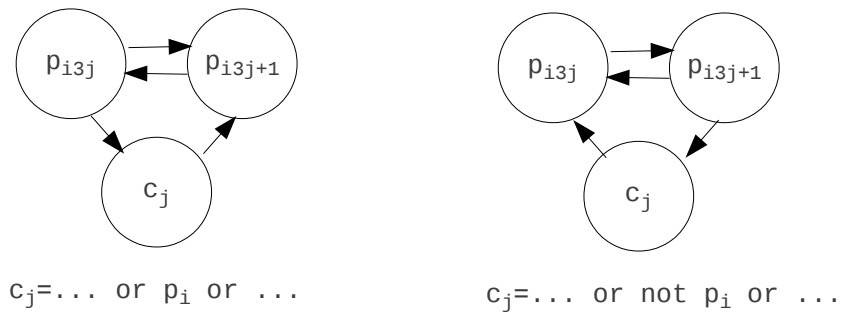


FIGURE 2 – Ajout d'arcs par clause