TD 09 – Approximation

Exercice 1. *SUBSET-SUM*

Montrer que le problème suivant SUBSET-SUM est $\mathcal{NP}$-complet.

SUBSET-SUM
Instance : un ensemble fini S d'entiers positifs et un entier objectif t.
Question : existe-t-il un sous-ensemble $S' \subseteq S$ tel que $\sum_{x \in S'} x = t$?

Indication : vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. A partir d'un ensemble de clauses $C_0, ..., C_{m-1}$ sur les variables $x_0, ..., x_{n-1}$, considérer S l'ensemble des entiers $v_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij} 10^j$ et $v'_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b'_{ij} 10^j$, $0 \leq i \leq n-1$, où b_{ij} (resp. b'_{ij}) vaut 1 si le littéral x_i (resp. $\overline{x_i}$) apparaît dans C_j et 0 sinon, et des entiers $s_j = 10^j$ et $s'_j = 2.10^j$, $0 \leq j \leq m-1$. Trouver alors un entier objectif t tel qu'il existe un sous-ensemble $S' \subseteq S$ de somme t si et seulement si l'ensemble initial de clauses est satisfiable. Conclure. Quels autres entiers auraient aussi marché ?

Exercice 2. *Problème du k-centre*

On rappelle quelques définitions :

– Dans un graphe $G = (V, E)$, un *ensemble indépendant* est un sous-ensemble de sommets V' non reliés par des arêtes (si $u \in V'$ et $v \in V'$, alors $(u, v) \notin E$).
– Dans un graphe $G = (V, E)$, un *ensemble dominant* est un sous-ensemble de sommets V' tel que tout sommet de $V \setminus V'$ est adjacent à un sommet de V'. On note $dom(G)$ le cardinal minimal d'un ensemble dominant.

1. Montrer que trouver un ensemble dominant de cardinal minimal $dom(G)$ est NP-difficile.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, complet, dont les arêtes sont pondérées par une fonction de poids w qui vérifie l'inégalité triangulaire : $w(u, v) \leq w(u, w) + w(w, v)$ pour tout triplet de sommets (u, v, w). Soit aussi un entier $k \geq 1$.
Pour tout $S \subset V$ et tout $v \in V \setminus S$, on définit $connect(v, S)$ comme le poids minimal d'une arête reliant v à un sommet de S : $connect(v, S) = \min_{s \in S}\{w(v, s)\}$. Le problème est de trouver un k-centre, c'est à dire un sous-ensemble S de cardinal k et tel que $center(S) = \max_{v \in V \setminus S}\{connect(v, S)\}$ soit minimal.

2. À quoi peut bien servir de déterminer un k-centre (donner un exemple d'application) ?
3. Montrer que trouver un k-centre est NP-difficile.

On va chercher une 2-approximation, i.e. un S de cardinal k tel que $center(S) \leq 2 \cdot OPT$, où $OPT = \min_{S \subset V, |S|=k}\{center(S)\}$.
On ordonne les arêtes de E par poids croissant : $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$, où $m = |E|$. On pose $G_i = (V, E_i)$ où $E_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ est l'ensemble des i premières arêtes.

4. Montrer que résoudre le problème du k-centre revient à trouver le plus petit indice i tel que G_i a un ensemble dominant de cardinal au plus k.

Une dernière définition : le carré d'un graphe $G = (V, E)$, noté $G^{(2)} = (V, E^{(2)})$, contient les chemins de longueur au plus deux : $(u, v) \in E^{(2)}$ si $(u, v) \in E$ ou s'il existe $w \in V$ tel que $(u, w) \in E$ et $(w, v) \in E$.

5. Étant donné un graphe H, soit I un ensemble indépendant du graphe carré $H^{(2)}$. Montrer que $|I| \leq dom(H)$.
6.
   L'algorithme d'approximation du k-centre est le suivant :
   (a) Montrer que $w(e_j) \leq OPT$.
   (b) Montrer que l'algorithme est bien une 2-approximation.
7. Montrer que la borne 2 est stricte : donner un exemple de graphe où l'algorithme réalise effectivement une 2-approximation.
8. Montrer que si $P \neq NP$, il n'existe pas de $(2 - \varepsilon)$-approximation au problème du k-centre, pour tout $\varepsilon > 0$.

début

Construire $G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, \ldots, G_m^{(2)}$;

Trouver de manière gloutonne un ensemble indépendant inextensible (auquel on ne peut pas rajouter des sommets) M_i dans chaque graphe $G_i^{(2)}$;

Trouver le plus petit indice i tel que $|M_i| \leq k$, soit j cet indice;

retourner M_j;

fin