TD 10 – Fonctions récursives

Exercice 1. *Retour à l'école maternelle...*

Montrer que les fonctions suivantes sont récursives (et indiquer lesquelles sont primitives) :

1. La fonction *prédécesseur* p définie par $p(n) = \max(0, n-1)$.
2. La fonction *quasi-différence* sub définie par $sub(n, m) = n - m$ si $n \geq m$ et 0 sinon.
3. La fonction *égalité à* 0 $eq0$ définie par $eq0(n) = 1$ si $n = 0$ et 0 sinon.
4. La fonction *égalité* eq définie par $eq(m, n) = 1$ si $m = n$ et 0 sinon.
5. La fonction *division* div ou $div(m, n)$ est le quotient de la division euclidienne de n par m.
6. La fonction *reste* mod ou $mod(m, n)$ est le reste de la division euclidienne de n par m.
7. La fonction *puissance* pow où $pow(n, m) = m^n$.
8. La fonction *logarithme* log où $log(n, m)$ est le logarithme en base m de n, c'est-à-dire le plus petit entier k tel que $m^k \leq n$.
9. La fonction *premier* $prime$ où $prime(p) = 1$ si p est premier et 0 sinon.
   (*Indice : on pourra définir une ou des fonctions intermédiaires.*)

Exercice 2. *Récurons encore, mais le moins possible alors*

Montrer, en utilisant le schéma de minimisation, que les fonctions suivantes sont récursives [1] :

1. $f(n) = \sqrt{n}$ si n est un carré parfait, indéfini sinon.
2. $f(n) = n/2$ si n est pair, indéfini sinon.
3. $f(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

Exercice 3. *Dia-go-nalisons ! Dia-go-nalisons !*

1. Combien existe-t-il de fonctions récursives primitives ?
   (Indice : on pourra considérer une définition « par le bas » des fonctions récursives.)
2. En déduire qu'il existe des fonctions qui ne sont pas primitives récursives.
3. Qu'en est-il des fonctions récursives ?

Exercice 4. *Champs-(9+1)-K*

On dit que $A \subseteq \mathbb{N}$ est un *ensemble récursif* si sa fonction caractéristique est récursive, c'est-à-dire si la fonction $\chi_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est récursive, où χ_A est définie par $\chi_A(n) = 1$ si $n \in A$, et 0 sinon. On dit qu'un prédicat (logique) P d'arité p est un *prédicat récursif* si l'ensemble des p-uplets vérifiant P est récursif (on identifie alors P à ce sous-ensemble de $\mathbb{N}^p$).

1. Montrer que tout ensemble fini est récursif. Montrer que pour k fixé, le prédicat P_k défini par « être un multiple de k », est récursif.

1. Parmi elles, lesquelles sont primitives ?

2. *Clôture par opérations booléennes :* montrer que les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et A^C sont récursifs si A et B le sont.

3. *Clôture par schéma de définition par cas :* montrer que si les ensembles disjoints $A_1, \dots A_k$ sont récursifs et si les fonctions $f_1, \dots f_k, f$ sont récursives, alors la fonction g définie par :
$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A_1 \\ \dots & \\ f_k(x) & \text{si } x \in A_k \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases} , \quad \text{est récursive.}$$

4. *Clôture par quantification bornée.*
   - *(i)* Montrer que si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est récursive, alors la somme bornée $S_f(n) := \sum_{i=0}^{n} f(i)$ et le produit borné $P_f(n) := \prod_{i=0}^{n} f(i)$ sont récursifs.
   - *(ii)* En déduire que si le prédicat unaire $P \subseteq \mathbb{N}$ est récursif, alors les prédicats définis par $E(n) := (\exists i \leq n)\ P(i)$ et $F(n) := (\forall i \leq n)\ P(i)$ sont récursifs.
   - *(iii)* A-t-on encore **3.**, *(i)* et *(ii)* si on remplace "récursifs" par "récursifs primitifs" ?
     Soit f une fonction. On définit la fonction g par *schéma de minimisation bornée* [2] par : $g(x) = \begin{cases} min\{y \leq x \mid f(x,y) = 0\} & \text{s'il existe un tel } y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que l'ensemble des fonctions récursives primitives est clos par minimisation bornée.

5. Montrer que le codage bijectif $\alpha_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ (*c.f.* **TD7**), ainsi que les fonctions de décodage associées β_1 et β_2, sont récursives.

6. Montrer que la fonction p qui associe à n le $(n+1)$-ième nombre premier est récursive primitive. En déduire que la fonction G_k de codage des suites de longueur k définie par $G_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = p_1^{n_1+1} \times p_2^{n_2+1} \times \dots \times p_k^{n_k+1}$, est récursive primitive.

Exercice 5. *Énumérons les, mais pas n'importe comment*

On dit que que la fonction $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est une *fonction d'énumération* pour l'ensemble A de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ si pour tout e, la fonction $\varphi_e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\varphi_e(x) = \varphi(e,x)$ est dans A, et si réciproquement, pour toute fonction $f \in A$, il existe $e \in \mathbb{N}$ telle que $\forall x \in \mathbb{N} \quad f(x) = \varphi_e(x)$.

Montrer que $\mathcal{REC}_1$, l'ensemble des fonctions récursives d'arité 1, admet une fonction d'énumération récursive.

2. On note également $g(x) = (\mu y \leq x)(f(x,y) = 0)$.