TD 12 – Révisions partie 1

Exercice 1. *Matrices de tœplitz*

Une *matrice de Tœplitz* est une matrice $n \times n$ $(a_{i,j})$ telle que $a_{i,j} = a_{i-1,j-1}$ pour $2 \leq i, j \leq n$.

1. La somme de deux matrices de Tœplitz est-elle une matrice de Tœplitz ? Et le produit ?
2. Trouver un moyen d'additionner deux matrices de Tœplitz en $\mathcal{O}(n)$.
3. Comment calculer le produit d'une matrice de Tœplitz $n \times n$ par un vecteur de longueur n ? Quelle est la complexité de l'algorithme ?

Exercice 2. *Jeu de construction*

On veut construire une tour la plus haute possible à partir de différentes briques. On dispose de n types de briques et d'un nombre illimité de briques de chaque type. Chaque brique de type i est un parallélépipède de taille (x_i, y_i, z_i) et peut être orientée dans tous les sens, deux dimensions formant la base et la troisième dimension formant la hauteur.
Dans la construction de la tour, une brique ne peut être placée au dessus d'une autre que si les deux dimensions de la base de la brique du dessus sont *strictement inférieures* aux dimensions de la base de la brique du dessous.

1. Proposer un algorithme efficace pour construire une tour de hauteur maximale.

Exercice 3. *Triangulation de polygones*

On considère les polygones convexes du plan. Une triangulation d'un polygone est un ensemble de cordes qui ne se coupent pas à l'intérieur du polygone et qui le divisent en triangles.

1. Montrer qu'une triangulation d'un polygone à n côtés a $(n-3)$ cordes et $(n-2)$ triangles.

Le problème est celui de la triangulation optimale de polygones. On part d'un polygone convexe $P = \langle v_0, ..., v_n \rangle$, où $v_0, \ldots, v_n$ sont les sommets du polygone donnés dans l'ordre direct, et d'une fonction de pondération w définie sur les triangles formés par les côtés et les cordes de P (par exemple $w(i,j,k) = \|v_i v_j\| + \|v_j v_k\| + \|v_k v_i\|$ est le périmètre du triangle $v_i v_j v_k$). Le problème est de trouver une triangulation qui minimise la somme des poids des triangles de la triangulation.
On définit pour $1 \leq i < j \leq n$, $t[i,j]$ comme la pondération d'une triangulation optimale du polygone $\langle v_{i-1}, ..., v_j \rangle$, avec $t[i,i] = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

2. Définir t récursivement, en déduire un algorithme et sa complexité.
3. Si la fonction de poids est quelconque, combien faut-il de valeurs pour la définir sur tout triangle du polygone ? Comparez avec la complexité obtenue.
4. Si le poids d'un triangle est égal à son aire, que pensez-vous de l'algorithme que vous avez proposé ?