

TD 4 – Programmation Dynamique

Exercice 1.*Location de skis*

1. **Allocation de skis aux skieurs.** Spécifier un algorithme efficace pour une attribution optimale de m paires de skis de longueur s_1, \dots, s_m respectivement, à n skieurs ($m \geq n$) de taille h_1, \dots, h_n respectivement, *via* une fonction (injective) $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, f étant optimale lorsqu'elle minimise $\sum_{k=1}^n |s_f(k) - h_k|$.
Indication. Soit $A[n, m]$ ce minimum. Définir $A[i, j]$ pour des valeurs plus petites $i \leq n$ et $j \leq m$ (lesquelles ?), par une équation de récurrence (i et j font référence aux i premiers skieurs et aux j premières paires de skis, respectivement).
2. **Complexité.** Analyser la complexité (en veillant à affiner l'analyse de sorte à garantir que l'algorithme soit en $\mathcal{O}(n \log n)$ si $m = n$).
3. **Grand choix de skis.** Montrer qu'on peut avoir une meilleure complexité lorsque $n^2 = o(m)$.
Indication. Se restreindre à $\mathcal{O}(n^2)$ paires de skis.

Exercice 2.*Dans quel état j'erre ?*

La bibliothèque planifie son déménagement. Elle comprend une collection de n livres b_1, b_2, \dots, b_n . Le livre b_i est de largeur w_i et de hauteur h_i . Les livres doivent être rangés dans l'ordre donné (par valeur de i croissante) sur des étagères identiques de largeur L .

1. On suppose que tous les livres ont la même hauteur $h = h_i, 1 \leq i \leq n$. Montrer que l'algorithme glouton qui range les livres côte à côte tant que c'est possible minimise le nombre d'étagères utilisées.
2. Maintenant les livres ont des hauteurs différentes, mais la hauteur entre les étagères peut se régler. Le critère à minimiser est alors l'encombrement, défini comme la somme des hauteurs du plus grand livre de chaque étagère utilisée.
 - (a) Donner un exemple où l'algorithme glouton précédent n'est pas optimal.
 - (b) Proposer un algorithme optimal pour résoudre le problème, et donner son coût.
3. On revient au cas où tous les livres ont la même hauteur $h = h_i, 1 \leq i \leq n$. On veut désormais ranger les n livres sur k étagères de même longueur L à minimiser, où k est un paramètre du problème. Il s'agit donc de partitionner les n livres en k tranches, de telle sorte que la largeur de la plus large des k tranches soit la plus petite possible.
 - (a) Proposer un algorithme pour résoudre le problème, et donner son coût en fonction de n et k .
 - (b) On suppose maintenant que la la taille d'un livre est en $2^{o(kn)}$. Trouver un algorithme plus rapide que le précédent pour répondre à la même question.

Exercice 3.*Fanfare*

Une fanfare est composée de n musiciens de tailles t_1, t_2, \dots, t_n . Pour les jours de fête l'orchestre dispose de m uniformes ($m \geq n$) de tailles u_1, u_2, \dots, u_m . Chaque année certains musiciens s'en vont et sont remplacés par d'autres, il faut alors ré-attribuer à chaque musicien le costume qui lui sied le mieux.

René, le percussionniste, pense qu'il faut chercher à minimiser la différence moyenne entre la taille d'un musicien et celle de son costume :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |t_i - u_{\alpha(i)}|$$

où $\alpha(i)$ est l'indice du costume attribué au musicien de taille t_i . Il propose pour cela un algorithme glouton qui consiste à chercher i et j minimisant $|t_i - u_j|$. On attribue alors l'uniforme j au musicien i et on itère jusqu'à ce que tout le monde ait reçu un uniforme.

1. L'algorithme de René est-il optimal ?

Anne, la corniste, trouve plus équitable de chercher à minimiser le carré moyen des écarts :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - u_{\alpha(i)})^2$$

2. Montrez par un exemple l'avantage de cette fonction objective par rapport à la précédente. L'algorithme glouton est-il optimal pour la nouvelle fonction objective ?
3. Montrer que si il y a autant de costumes que de musiciens, l'algorithme consistant à classer les musiciens et le costumes par taille croissante et à attribuer au musicien i le costume i est optimal pour la seconde fonction objective.
4. Donner un algorithme donnant une solution optimale dans le cas $m \geq n$.