

TD 5 bis – Retour sur les TD précédents

Exercice 1.*Meetic*

Un site internet cherche à regrouper ses membres en fonction des goûts musicaux de chacun. Pour cela, chaque membre doit classer par ordre de préférence une liste d'artistes¹. On dit que deux membres, Arthur et Béatrice, ont des goûts musicaux proches lorsque qu'il y a peu d'*inversions* dans leurs classements : une inversion est une paire d'artiste $\{L, M\}$ telle qu'Arthur préfère L à M et Béatrice préfère M à L . On cherche donc à compter le nombre d'inversion dans les classements d'Arthur et Béatrice.

1. Compter le nombre d'inversion les classements suivants :

Arthur : Britney Spears, Lady Gaga, Michael Jackson, Madonna, Céline Dion ;

Béatrice : Lady Gaga, Madonna, Britney Spears, Michael Jackson, Céline Dion.

2. Proposer un algorithme naïf qui résout le problème. Quelle est sa complexité ?

On cherche maintenant à améliorer l'algorithme précédent en utilisant le paradigme Diviser-Pour-Régner. Pour cela, on coupe le classement de chaque membre en deux sous-classements de même taille, celui des artistes préférés (classement supérieur) et celui des autres artistes (classement inférieur). On compte alors les inversions (L, M) qui peuvent être de deux types : soit L et M apparaissent dans le même sous-classement de Béatrice, soit L et M apparaissent dans deux différents sous-classements de Béatrice (inversions mixtes).

3. On suppose que les deux sous-classements de Béatrice sont triés en fonction du classement d'Arthur². Montrer qu'on peut alors compter les inversions mixtes en temps linéaire.
4. Donner un algorithme de type Diviser-Pour-Régner qui fonctionne en temps $\mathcal{O}(n \log n)$.

Exercice 2.*Dans quel état j'erre ?*

La bibliothèque planifie son déménagement. Elle comprend une collection de n livres b_1, b_2, \dots, b_n . Le livre b_i est de largeur w_i et de hauteur h_i . Les livres doivent être rangés dans l'ordre donné (par valeur de i croissante) sur des étagères identiques de largeur L .

1. On suppose que tous les livres ont la même hauteur $h = h_i, 1 \leq i \leq n$. Montrer que l'algorithme glouton qui range les livres côte à côte tant que c'est possible minimise le nombre d'étagères utilisées.
2. Maintenant les livres ont des hauteurs différentes, mais la hauteur entre les étagères peut se régler. Le critère à minimiser est alors l'encombrement, défini comme la somme des hauteurs du plus grand livre de chaque étagère utilisée.
 - (a) Donner un exemple où l'algorithme glouton précédent n'est pas optimal.
 - (b) Proposer un algorithme optimal pour résoudre le problème, et donner son coût.
3. On revient au cas où tous les livres ont la même hauteur $h = h_i, 1 \leq i \leq n$. On veut désormais ranger les n livres sur k étagères de même longueur L à minimiser, où k est un paramètre du problème. Il s'agit donc de partitionner les n livres en k tranches, de telle sorte que la largeur de la plus large des k tranches soit la plus petite possible.
 - (a) Proposer un algorithme pour résoudre le problème, et donner son coût en fonction de n et k .
 - (b) On suppose maintenant que la la taille d'un livre est en $2^{o(kn)}$. Trouver un algorithme plus rapide que le précédent pour répondre à la même question.

1. Le classement est un ordre total.

2. Si L et M apparaissent dans le même sous-classement de Béatrice, alors ils apparaissent dans le même ordre que dans le classement d'Arthur.

Exercice 3.*Fanfare*

Une fanfare est composée de n musiciens de tailles t_1, t_2, \dots, t_n . Pour les jours de fête l'orchestre dispose de m uniformes ($m \geq n$) de tailles u_1, u_2, \dots, u_m . Chaque année certains musiciens s'en vont et sont remplacés par d'autres, il faut alors ré-attribuer à chaque musicien le costume qui lui sied le mieux.

René, le percussionniste, pense qu'il faut chercher à minimiser la différence moyenne entre la taille d'un musicien et celle de son costume :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |t_i - u_{\alpha(i)}|$$

où $\alpha(i)$ est l'indice du costume attribué au musicien de taille t_i . Il propose pour cela un algorithme glouton qui consiste à chercher i et j minimisant $|t_i - u_j|$. On attribue alors l'uniforme j au musicien i et on itère jusqu'à ce que tout le monde ait reçu un uniforme.

1. L'algorithme de René est-il optimal ?

Anne, la corniste, trouve plus équitable de chercher à minimiser le carré moyen des écarts :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - u_{\alpha(i)})^2$$

2. Montrez par un exemple l'avantage de cette fonction objective par rapport à la précédente. L'algorithme glouton est-il optimal pour la nouvelle fonction objective ?
3. Montrer que si il y a autant de costumes que de musiciens, l'algorithme consistant à classer les musiciens et le costumes par taille croissante et à attribuer au musicien i le costume i est optimal pour la seconde fonction objective.
4. Donner un algorithme donnant une solution optimale dans le cas $m \geq n$.