TD 8 – Réduction bis

Exercice 1. *SUBSET-SUM*

Montrer que le problème suivant SUBSET-SUM est $\mathcal{NP}$-complet.

SUBSET-SUM

Instance : un ensemble fini S d'entiers positifs et un entier objectif t.

Question : existe-t-il un sous-ensemble $S' \subseteq S$ tel que $\sum_{x \in S'} x = t$?

Indication : vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. A partir d'un ensemble de clauses $C_0, ..., C_{m-1}$ sur les variables $x_0, ..., x_{n-1}$, considérer S l'ensemble des entiers $v_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij} 10^j$ et $v'_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b'_{ij} 10^j$, $0 \leq i \leq n-1$, où b_{ij} (resp. b'_{ij}) vaut 1 si le littéral x_i (resp. $\overline{x_i}$) apparaît dans C_j et 0 sinon, et des entiers $s_j = 10^j$ et $s'_j = 2.10^j$, $0 \leq j \leq m-1$. Trouver alors un entier objectif t tel qu'il existe un sous-ensemble $S' \subseteq S$ de somme t si et seulement si l'ensemble initial de clauses est satisfiable. Conclure. Quels autres entiers auraient aussi marché ?

Exercice 2. *$\mathcal{NP}$-complétude de 2-partition*

On définit le problème de décision 2-Partition ainsi : soit $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ des entiers, existe-t-il $I \subset S$ tel que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$?

1. Montrer que 2-Partition est NP-complet.

Exercice 3. *Chemin Hamiltonien*

On définit le problème HC (Hamiltonian Cycle) ainsi : soit un graphe $G = (V, E)$, existe-t-il un cycle qui passe par chaque sommet une et une seule fois ?

1. Montrer que ce problème appartient à la classe NP.
2. Dans le problème SAT, montrer qu'on peut supposer sans perte de généralité qu'une proposition n'apparaît pas à la fois positivement et négativement dans une clause.

Pour montrer que ce problème est NP-difficile, on réduit le problème de satisfaisabilité d'une formule CNF au problème de l'existence d'un circuit hamiltonien. Soit $\phi = \bigwedge_{j=1}^{m} c_j$ une formule CNF construite à partir de propositions $p_1, \dots, p_n$.

On construit ensuite le graphe indépendant de la formule : les sommets sont $d, f, p_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq 3m+3$ et les sommets c_j avec $1 \leq j \leq m$. Les arcs de ce graphe sont :

- Les arcs $(d, p_{1,1})$, $(d, p_{1,3m+3})$, $(p_{n,1}, f)$, $(p_{n,3m+3}, f)$, (f, d).
- Pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on a les arcs $(p_{i,1}, p_{i+1,1})$, $(p_{i,1}, p_{i+1,3m+3})$, $(p_{i,3m+3}, p_{i+1,1})$, $(p_{i,3m+3}, p_{i+1,3m+3})$.
- Pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq 3m+2$, on a les arcs $(p_{i,j}, p_{i,j+1})$, $(p_{i,j+1}, p_{i,j})$.

Ce sous-graphe est représenté sur la figure 1.

On ajoute ensuite les arcs suivant :

- Pour chaque clause j où apparaît positivement p_i, on ajoute $(p_{i,3j}, c_j)$ et $(c_j, p_{i,3j+1})$.
- Pour chaque clause j où apparaît négativement p_i, on ajoute $(p_{i,3j+1}, c_j)$ et $(c_j, p_{i,3j})$.

Ces ajouts sont représentés par la figure 2.

3. En utilisant ce graphe, montrer que le problème HC est NP-complet.

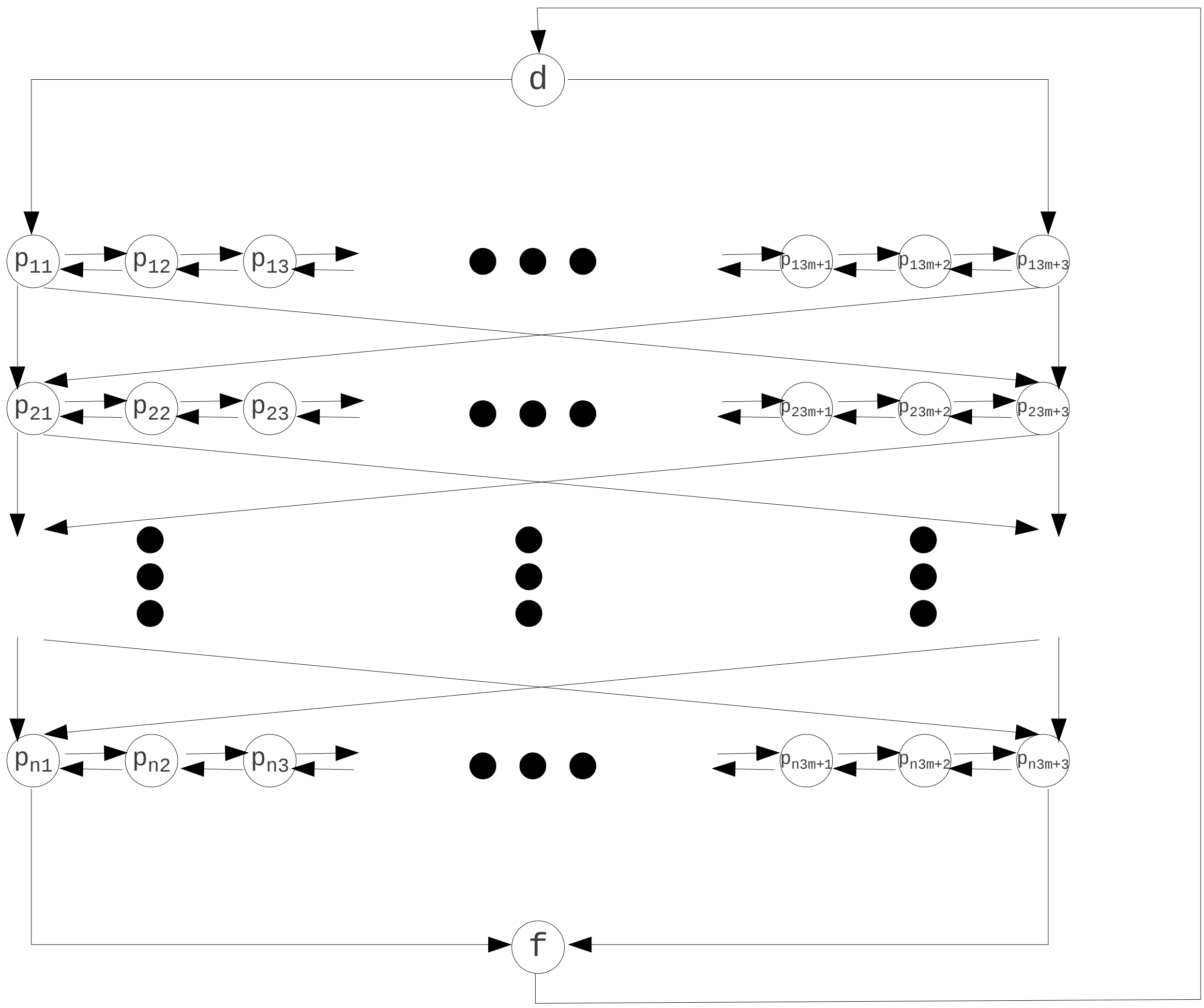

Figure 1 – Graphe indépendant de la formule

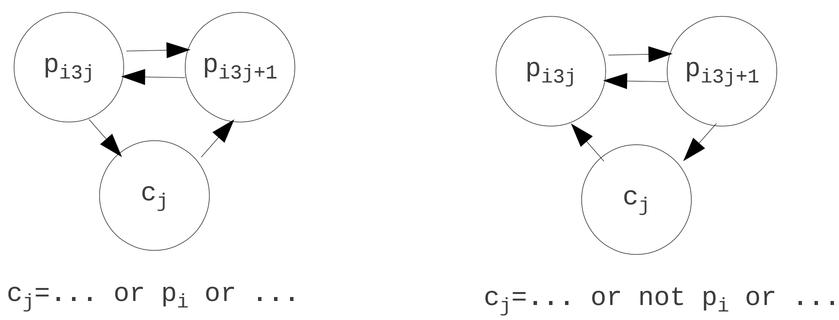

Figure 2 – Ajout d'arcs par clause