Exercices du chapitre II - Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 – Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = 3x - 8y + 4, \qquad f_2(x,y) = 4x^2 - 5y^2 + \frac{5}{x} - 2, \qquad f_3(x,y,z) = 3x^2y^4z,$$

$$f_4(x,y) = -x^2y + 3xy + 8xy^2 - 1, \qquad f_5(x,y) = \sqrt{3x+2y}, \qquad f_6(x,y) = \frac{x}{y}, \qquad f_7(x,y) = e^{\frac{x}{y}},$$

$$f_8(x,y) = \ln(xy), \qquad f_9(x,y) = \sin(x-4y)e^{x^3y}, \qquad f_{10}(x,y) = \cos(x^2y)\ln(1+x^2+y^3).$$

Exercice 2 – On considère la fonction définie par $f(x,y) = x\cos(xy) + 2$.

a) Calculer les dérivées partielles de f.

b) Donner une équation du plan tangent à la surface représentant f au dessus du point $(1, \frac{\pi}{2})$.

Exercice 3 –

1. Calculer la dérivée partielle par rapport à x de la fonction suivante

$$j(x,y) = (u(x,y))^2\cos(v(x,y)) \quad \text{où} \quad u(x,y) = 2x + y \text{ et } v(x,y) = \ln(x) - y.$$

2. Soit la fonction $f(x,y) = e^x \sin y$.
On pose $x(r,\alpha) = r\cos(\alpha)$, $y(r,\alpha) = r\sin(\alpha)$ et $F(r,\alpha) = f(x(r,\alpha), y(r,\alpha))$.
Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial r}(r,\alpha)$ et $\frac{\partial F}{\partial \alpha}(r,\alpha)$ de deux façons différentes : d'abord en utilisant la formule des dérivées d'une fonction composée puis par un calcul direct (en remplaçant dans F).

Exercice 4 – Soit la fonction $f(x,y) = \frac{y}{x^2+1}$.

a) Déterminer $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y)$.

b) Tracer les *lignes de niveau* L_0, L_1 et L_{-1} où $L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = a\}$.

c) Dessiner les vecteurs gradients aux points $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,2)$ et $(1,-2)$.

Exercice 5 –

1. Calculer les dérivées partielles de la fonction $f_1(x,y) = x^2\ln(y) + 2\frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(y)} + x\sin(y^2-1) + 2$.

2. Soit la fonction $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Déterminer $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y)$. Tracer les lignes de niveau L_0, L_1 et L_{e^4}.

Exercice 6 – Le point de coordonnées $(3,-1)$ appartient à la ligne de niveau L_{10} de la fonction f. On sait de plus que $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\,(3,-1) = 2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$.

1. Donner l'équation de la tangente à la ligne de niveau 10 au point $(3,-1)$.
2. Donner l'équation cartésienne du plan tangent à la surface représentative de f au dessus du point $(3,-1)$.

Exercices complémentaires

Exercice 7 –
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,y) = (x^2+1)y + (x+y)(x+1)\sin(y^2+xy-6)$.

1. Calculer, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
2. Que vaut $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(1,2)$?
3. Déterminer une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $M_0(1,2,f(1,2))$.

Exercice 8 – On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = e^{x^2+y^2-2y}.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f par rapport à x et à y.
2. Calculer le gradient de f en $(0,0)$.
3. Identifier la ligne de niveau 1 de f. Quelle est sa tangente en $(0,0)$? Est-ce cohérent avec le résultat de la question précédente ?

Exercice 9 – Soit la fonction $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_0,y_0)$.
2. Vérifier que le point $P\big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\big)$ appartient à la ligne de niveau $L_{\frac{2}{\pi}}$.

   Déterminer l'équation de la tangente à la ligne de niveau $\frac{2}{\pi}$ au point P.
3. Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la surface représentative de f au point $\big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}, f(P)\big)$.

Exercice 10 – Soit $f_{x,y}(t) = x^2t^2 + (x+y)t + 1$, $x \neq 0$, et $F(x,y) = \min_{t\in\mathbb{R}} f_{x,y}(t)$.
Calculer $F(x,y)$ et ses dérivées partielles.

Exercice 11 – Soit $F(x,y) = e^x + e^y + x + y - 2$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, où I est un intervalle ouvert contenant 0. On pose $h(x) = F(x, \varphi(x))$.

1. Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$ en fonction de F, φ et de leurs dérivées partielles.
2. On suppose que φ vérifie : $e^x + e^{\varphi(x)} + x + \varphi(x) = 2$ pour tout $x \in I$.

   Qu'en déduisez vous pour h ?

   Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.