Une version *arêtes* de la propriété d'Erdős–Pósa

Jean-Florent Raymond   Ignasi Sau   Dimitrios M. Thilikos

Faculté de Mathématiques, Informatique et Mécanique, Université de Varsovie

LIRMM, Montpellier

JGA 2013 – Orsay
Jeudi 14 Novembre 2013

Théorème d'Erdős–Pósa (1965)

Théorème (EP version classique)

Tout graphe a

- ***k*** *cycles sommet-disjoints ;*
- *ou* ***f(k)*** *sommets touchant tous les cycles.*

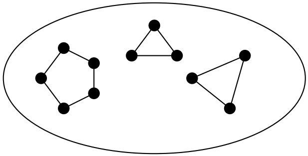
$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (EP version classique)

Tout graphe a

- ***k*** *cycles sommet-disjoints ;*
- *ou* ***f(k)*** *sommets touchant tous les cycles.*

$f(k) = O(k \log k)$



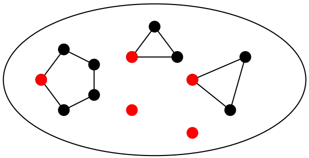
Théorème d'Erdős–Pósa (1965)

Théorème (EP version classique)

Tout graphe a

- ***k*** *cycles sommet-disjoints ;*
- *ou* ***f(k)*** *sommets touchant tous les cycles.*

$f(k) = O(k \log k)$



Théorème d'Erdős–Pósa (1965)

Théorème (EP version classique)

Tout graphe a

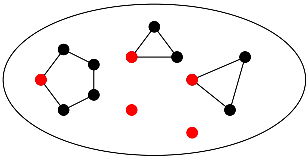
- ***k*** *cycles sommet-disjoints ;*
- *ou* ***f(k)*** *sommets touchant tous les cycles.*

$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (EP version arêtes)

Tout graphe a

- ***k*** *cycles arête-disjoints ;*
- *ou* ***h(k)*** *arêtes touchant tous les cycles.*



Théorème d'Erdős–Pósa (1965)

Théorème (EP version classique)

Tout graphe a

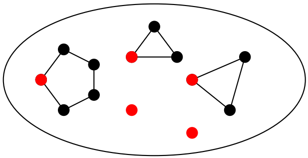
- *k cycles sommet-disjoints ;*
- *ou $f(k)$ sommets touchant tous les cycles.*

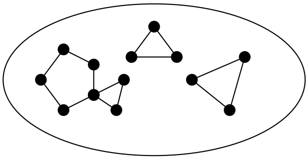
$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (EP version arêtes)

Tout graphe a

- *k cycles arête-disjoints ;*
- *ou $h(k)$ arêtes touchant tous les cycles.*





Théorème d'Erdős–Pósa (1965)

Théorème (EP version classique)

Tout graphe a

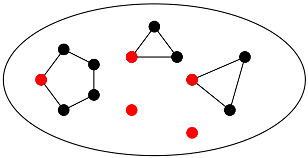
- ***k*** *cycles sommet-disjoints ;*
- *ou* ***f(k)*** *sommets touchant tous les cycles.*

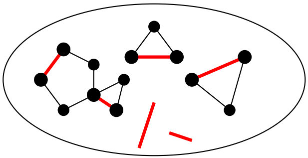
$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (EP version arêtes)

Tout graphe a

- ***k*** *cycles arête-disjoints ;*
- *ou* ***h(k)*** *arêtes touchant tous les cycles.*





Théorème d'Erdős–Pósa (1965)

Théorème (EP version classique)

Tout graphe a

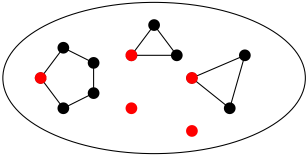
- ***k*** *cycles sommet-disjoints ;*
- *ou* ***f(k)*** *sommets touchant tous les cycles.*

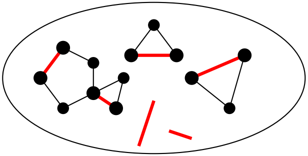
$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (EP version arêtes)

Tout graphe a

- ***k*** *cycles arête-disjoints ;*
- *ou* ***h(k)*** *arêtes touchant tous les cycles.*





(relation "packing" / couverture)

Théorème d'Erdős–Pósa (1965)

Théorème (EP version classique)

Tout graphe a

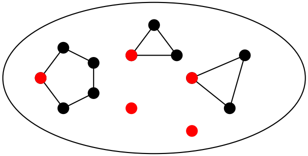
- ***k*** *cycles sommet-disjoints ;*
- *ou* ***f(k)*** *sommets touchant tous les cycles.*

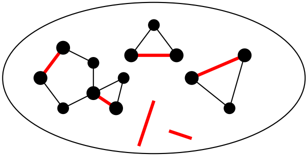
$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (EP version arêtes)

Tout graphe a

- ***k*** *cycles arête-disjoints ;*
- *ou* ***h(k)*** *arêtes touchant tous les cycles.*





(relation "packing" / couverture)

Généralisation ?

Quelques définitions

H **mineur** de G ($H \leqslant_{\mathrm{m}} G$) s'il s'obtient par :

- suppressions de sommets ;

Quelques définitions

H **mineur** de G ($H \leqslant_{\mathrm{m}} G$) s'il s'obtient par :

- suppressions de sommets ;
- suppressions d'arêtes ;

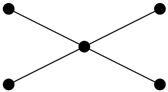
H **mineur** de G ($H \leqslant_{\mathrm{m}} G$) s'il s'obtient par :

- suppressions de sommets ;
- suppressions d'arêtes ;
- contractions d'arêtes.

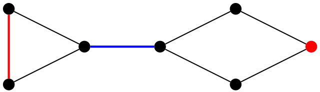
Quelques définitions

H **mineur** de G ($H \leqslant_{\mathrm{m}} G$) s'il s'obtient par :

- suppressions de sommets ;
- suppressions d'arêtes ;
- contractions d'arêtes.



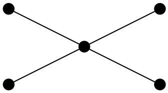
$$\leqslant_{\mathrm{m}}$$



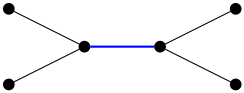
Quelques définitions

H **mineur** de G ($H \leqslant_{\mathrm{m}} G$) s'il s'obtient par :

- suppressions de sommets ;
- suppressions d'arêtes ;
- contractions d'arêtes.



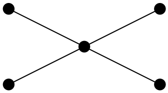
$$\leqslant_{\mathrm{m}}$$



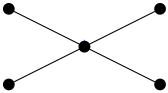
Quelques définitions

H **mineur** de G ($H \leqslant_{\mathrm{m}} G$) s'il s'obtient par :

- suppressions de sommets ;
- suppressions d'arêtes ;
- contractions d'arêtes.



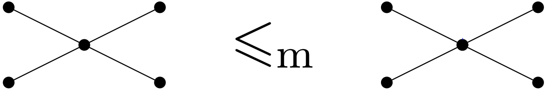
$$\leqslant_{\mathrm{m}}$$



Quelques définitions

H **mineur** de G ($H \leqslant_{\mathrm{m}} G$) s'il s'obtient par :

- suppressions de sommets ;
- suppressions d'arêtes ;
- contractions d'arêtes.

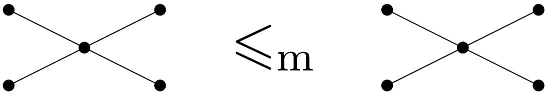


Modèle de H dans G : sous-graphe de G qui se contracte en H.

Quelques définitions

H **mineur** de G ($H \leqslant_{\mathrm{m}} G$) s'il s'obtient par :

- suppressions de sommets ;
- suppressions d'arêtes ;
- contractions d'arêtes.



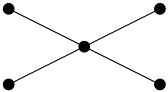
Modèle de H dans G : sous-graphe de G qui se contracte en H.

$\mathcal{M}(H)$: ensemble des modèles de H.

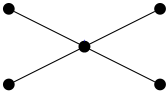
Quelques définitions

H **mineur** de G ($H \leqslant_{\mathrm{m}} G$) s'il s'obtient par :

- suppressions de sommets ;
- suppressions d'arêtes ;
- contractions d'arêtes.



$\leqslant_{\mathrm{m}}$

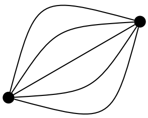


Modèle de H dans G : sous-graphe de G qui se contracte en H.

$\mathcal{M}(H)$: ensemble des modèles de H.

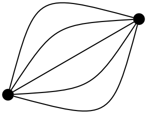
graphe $\sim$ multigraphe

θ_r : multigraphe à 2 sommets et r arrêtes.



Quelques définitions

θ_r : multigraphe à 2 sommets et r arrêtes.



Remarque

$$\begin{aligned} G \text{ a un cycle} &\Leftrightarrow \theta_2 \leqslant_{\mathrm{m}} G \\ &\Leftrightarrow G \text{ contient un modèle de } \theta_2 \end{aligned}$$

Retour au théorème d'Erdős–Pósa

Théorème (EP version sommets)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_2 s-disjoints ;*
- *ou **f(k)** sommets touchant tous les modèles de θ_2.*

$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (EP version sommets)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_2 s-disjoints ;*
- *ou **f(k)** sommets touchant tous les modèles de θ_2.*

$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (EP version arêtes)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_2 a-disjoints ;*
- *ou **h(k)** arêtes touchant tous les modèles de θ_2.*

Théorème (EP version sommets)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_2 s-disjoints ;*
- *ou **f(k)** sommets touchant tous les modèles de θ_2.*

$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (EP version arêtes)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_2 a-disjoints ;*
- *ou **h(k)** arêtes touchant tous les modèles de θ_2.*

Et avec θ_r au lieu de θ_2 ?

Erdős–Pósa pour θ_r

Théorème (Fomin *et al.* 12)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_r s-disjoints ;*
- *ou **f(k)** sommets touchant tous les modèles de θ_r.*

$f(k) = O(k^2)$

Théorème (Fiorini *et al.* 13)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_r s-disjoints ;*
- *ou **f(k)** sommets touchant tous les modèles de θ_r.*

$f(k) = O(k \log k)$

Erdős–Pósa pour θ_r

Théorème (Fiorini *et al.* 13)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_r s-disjoints ;*
- *ou **f(k)** sommets touchant tous les modèles de θ_r.*

$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (R., Sau, Thilikos 13)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_r a-disjoints ;*
- *ou **h(k)** arêtes touchant tous les modèles de θ_r.*

$h(k) = O(k^3 r^3)$

Théorème (Fiorini *et al.* 13)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_r s-disjoints ;*
- *ou **f(k)** sommets touchant tous les modèles de θ_r.*

$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (R., Sau, Thilikos 13)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_r a-disjoints ;*
- *ou **h(k)** arêtes touchant tous les modèles de θ_r.*

$h(k) = O(k^3 r^3)$

[Robertson, Seymour 86]
$\mathcal{M}(H)$ a la prop. d'EP ssi H planaire.

Théorème (Fiorini *et al.* 13)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_r s-disjoints ;*
- *ou **f(k)** sommets touchant tous les modèles de θ_r.*

$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (R., Sau, Thilikos 13)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_r a-disjoints ;*
- *ou **h(k)** arêtes touchant tous les modèles de θ_r.*

$h(k) = O(k^3 r^3)$

[Robertson, Seymour 86]
$\mathcal{M}(H)$ a la prop. d'EP ssi H planaire.

[Chekury, Chuzhoy 13]
$f_H(k) = O(k \,\mathrm{polylog} k)$

Erdős–Pósa pour θ_r

Théorème (Fiorini *et al.* 13)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_r s-disjoints ;*
- *ou **f(k)** sommets touchant tous les modèles de θ_r.*

$f(k) = O(k \log k)$

Théorème (R., Sau, Thilikos 13)

Tout graphe G a

- ***k*** *modèles de θ_r a-disjoints ;*
- *ou **h(k)** arêtes touchant tous les modèles de θ_r.*

$h(k) = O(k^3 r^3)$

[Robertson, Seymour 86]
$\mathcal{M}(H)$ a la prop. d'EP ssi H planaire.

[Chekury, Chuzhoy 13]
$f_H(k) = O(k \operatorname{polylog} k)$

?

La preuve en bref

Trois cas :

- soit $\mathbf{tw}(G) \geqslant 2k^2r^2$

Trois cas :

- soit $\mathbf{tw}(G) \geqslant 2k^2r^2$, **[Fomin *et al.* 12]** : $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$

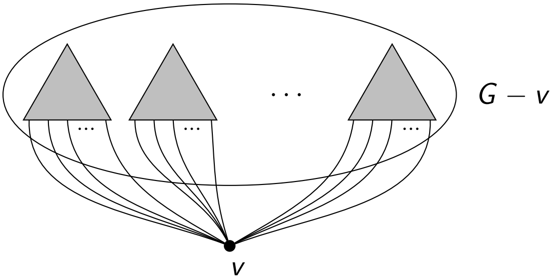
La preuve en bref

Trois cas :

- soit $\mathbf{tw}(G) \geqslant 2k^2r^2$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) \geqslant 2kr$

Trois cas :

- soit $\mathbf{tw}(G) \geqslant 2k^2r^2$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) \geqslant 2kr$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$



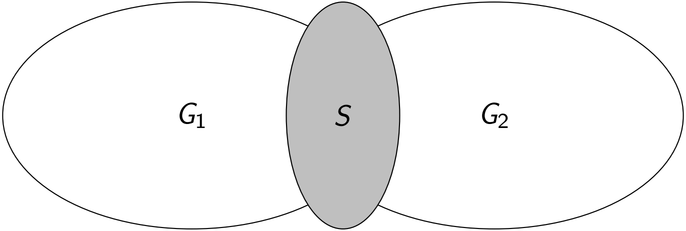
La preuve en bref

Trois cas :

- soit $\mathbf{tw}(G) \geqslant 2k^2r^2$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) \geqslant 2kr$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) < 2kr$

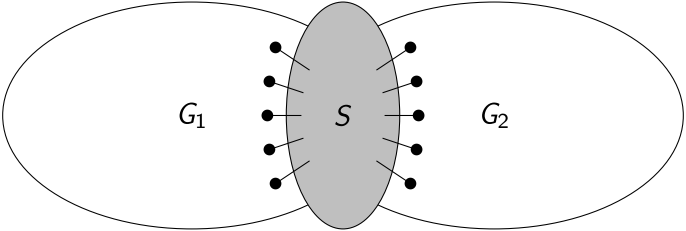
Trois cas :

- soit $\mathbf{tw}(G) \geqslant 2k^2r^2$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) \geqslant 2kr$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) < 2kr$



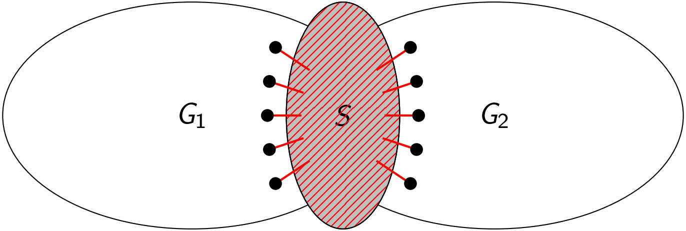
Trois cas :

- soit $\mathbf{tw}(G) \geqslant 2k^2r^2$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) \geqslant 2kr$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) < 2kr$



Trois cas :

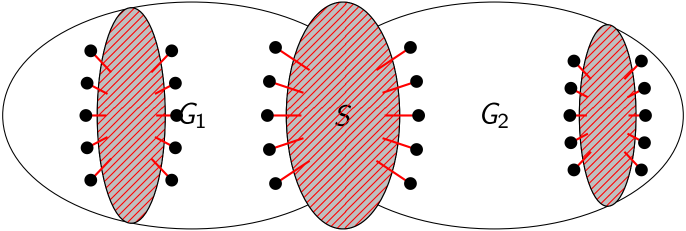
- soit $\mathbf{tw}(G) \geqslant 2k^2r^2$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) \geqslant 2kr$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) < 2kr$



La preuve en bref

Trois cas :

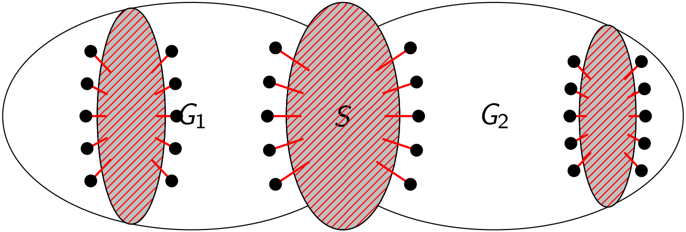
- soit $\mathbf{tw}(G) \geqslant 2k^2r^2$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) \geqslant 2kr$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) < 2kr$



La preuve en bref

Trois cas :

- soit $\mathbf{tw}(G) \geqslant 2k^2r^2$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) \geqslant 2kr$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) < 2kr$



...

Trois cas :

- soit $\mathbf{tw}(G) \geqslant 2k^2r^2$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) \geqslant 2kr$: $G \geqslant_{\mathrm{m}} k \cdot \theta_r$ ✓
- soit $\mathbf{tw}(G) < 2k^2r^2$ et $\Delta(G) < 2kr$: $|\mathcal{S}| = O(k^3r^3)$ ✓

Questions

- meilleur “gap” pour θ_r ?

Questions

- meilleur "gap" pour θ_r ?
- pour quels autres graphes planaires ?

Questions

- meilleur “gap” pour θ_r ?
- pour quels autres graphes planaires ?
- borne inférieure sur le “gap” ?

Questions

- meilleur "gap" pour θ_r ?
- pour quels autres graphes planaires ?
- borne inférieure sur le "gap" ?

http://arxiv.org/abs/1311.1108

Merci de votre attention.