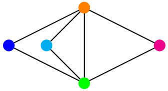
Problèmes (in)solubles sur les H-graphes

Jean-Florent Raymond

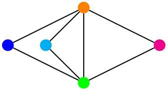
TU Berlin

Travail commun avec Fedor Fomin et Petr Golovach (Univ. de Bergen).

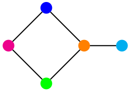
Graphes d'intervalles : $\mathcal{U} = \{\text{intervalles de } \mathbb{R}\}$.

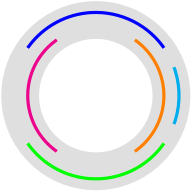


Graphes d'intervalles : $\mathcal{U} = \{\text{intervalles de } \mathbb{R}\}$.

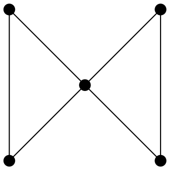


Graphes d'intervalles circulaires :
$\mathcal{U} = \{\text{intervalles le long d'un cycle}\}$.



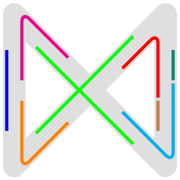


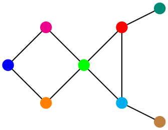
Graphes d'intersection topologique de H

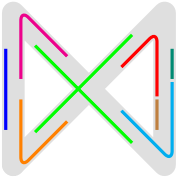
$H =$ 

Graphes d'intersection topologique de H

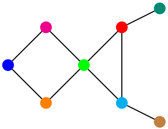
Graphes d'intersection topologique de H

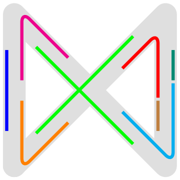






Graphes d'intersection topologique de H

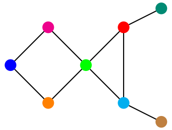


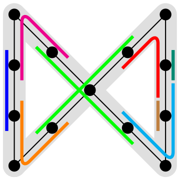


H-graphe (Bíró, Hujter, Tuza 92) :

graphe d'intersection de ss-gr. connexes d'une subdivision de H

Graphes d'intersection topologique de H

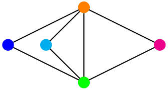




H-graphe (Bíró, Hujter, Tuza 92) :

graphe d'intersection de ss-gr. connexes d'une subdivision de H

Graphes d'intersection topologique de H

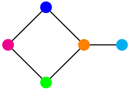


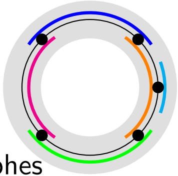
Graphes d'intervalles $= K_2$-graphes

H-graphe (Bíró, Hujter, Tuza 92) :

graphe d'intersection de ss-gr. connexes d'une subdivision de H

Graphes d'intersection topologique de H



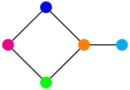


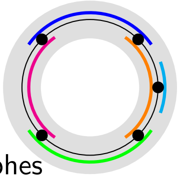
Graphes d'intervalles circ. $=$ K_3-graphes

H-graphe (Bíró, Hujter, Tuza 92) :

graphe d'intersection de ss-gr. connexes d'une subdivision de H

Graphes d'intersection topologique de H





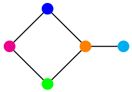
Graphes d'intervalles circ. $=$ K_3-graphes

H-graphe (Bíró, Hujter, Tuza 92) :

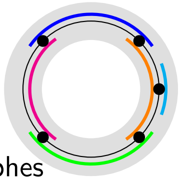
graphe d'intersection de ss-gr. connexes d'une subdivision de H

- cadre restreint mais général (tout graphe est un H-graphe).

Graphes d'intersection topologique de H



Graphes d'intervalles circ. $= K_3$-graphes



H-graphe (Bíró, Hujter, Tuza 92) :

graphe d'intersection de ss-gr. connexes d'une subdivision de H

- cadre restreint mais général (tout graphe est un H-graphe).
- quels problèmes sont *faciles* sur les H-graphes ?

Theorem (Divers auteurs)

CLIQUE, STABLE, DOMINANT, COUPE CYCLE *sont NP-durs en général mais polynomiaux sur les graphes d'intervalles (circulaires).*

Theorem (Divers auteurs)

CLIQUE, STABLE, DOMINANT, COUPE CYCLE *sont NP-durs en général mais polynomiaux sur les graphes d'intervalles (circulaires).*

Extension aux H-graphes ?

Algorithmes et H-graphes

Theorem (Divers auteurs)

CLIQUE, STABLE, DOMINANT, COUPE CYCLE *sont NP-durs en général mais polynomiaux sur les graphes d'intervalles (circulaires).*

Extension aux H-graphes ?

Theorem (Chaplick, Toepfer, Voborník, Zeman, WG 2017)

Dans un H-graphe, DOMINANT *et* STABLE *peuvent être résolus en temps $n^{O(\|H\|)}$.*

Algorithmes et H-graphes

Theorem (Divers auteurs)

CLIQUE, STABLE, DOMINANT, COUPE CYCLE *sont NP-durs en général mais polynomiaux sur les graphes d'intervalles (circulaires).*

Extension aux H-graphes ?

Theorem (Chaplick, Toepfer, Voborník, Zeman, WG 2017)

Dans un H-graphe, DOMINANT *et* STABLE *peuvent être résolus en temps $n^{O(\|H\|)}$.*

- et pour d'autres problèmes ?
- explication générique ?

Trois directions

1. largeur “mim” ;
2. séparateurs minimaux ;
3. complexité paramétrée.

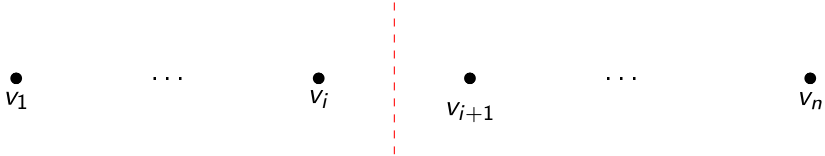
Largeur mim linéaire

$\mathrm{lmim}(G) \leqslant k$ s'il existe un ordre

$\operatorname{lmim}(G) \leqslant k$ s'il existe un ordre

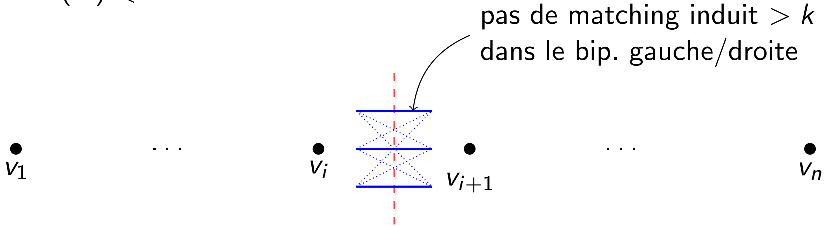
$$v_1 \quad \cdots \quad v_i \quad v_{i+1} \quad \cdots \quad v_n$$

lmim$(G) \leqslant k$ s'il existe un ordre



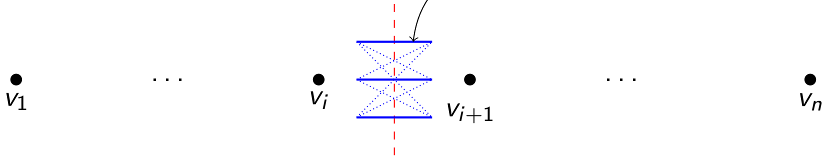
Largeur mim linéaire

$\mathrm{lmim}(G) \leqslant k$ s'il existe un ordre



lmim(G) $\leqslant k$ s'il existe un ordre

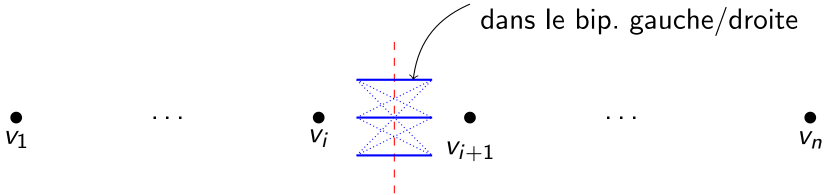
pas de matching induit $> k$
dans le bip. gauche/droite



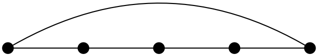
Largeur mim linéaire

$\mathrm{lmim}(G) \leqslant k$ s'il existe un ordre

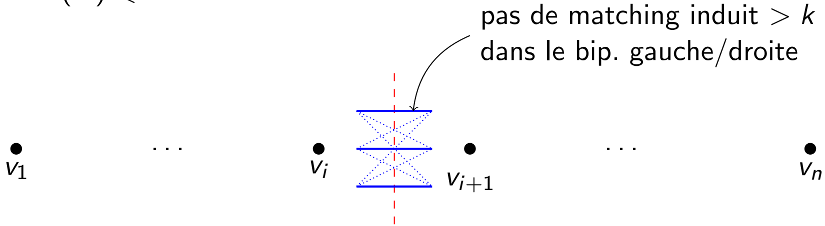
pas de matching induit $> k$
dans le bip. gauche/droite



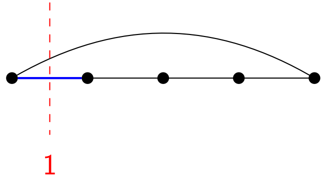
Ex : C_5



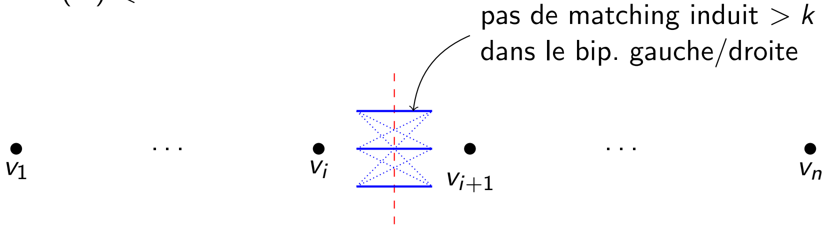
lmim$(G) \leqslant k$ s'il existe un ordre



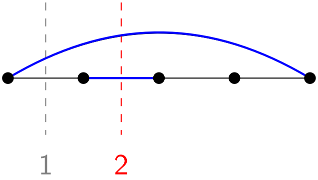
Ex : C_5



$\mathrm{lmim}(G) \leqslant k$ s'il existe un ordre

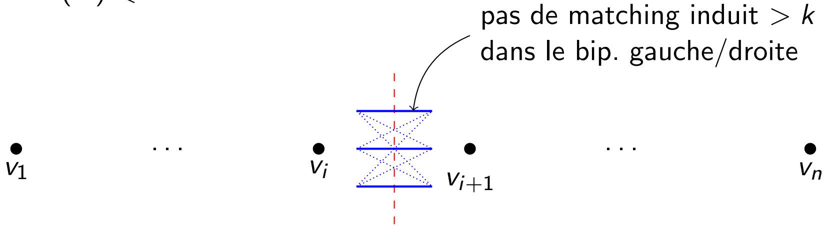


Ex : C_5

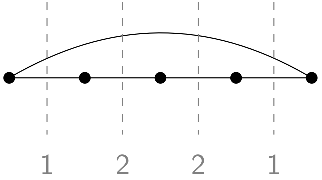


Largeur mim linéaire

$\mathrm{lmim}(G) \leqslant k$ s'il existe un ordre

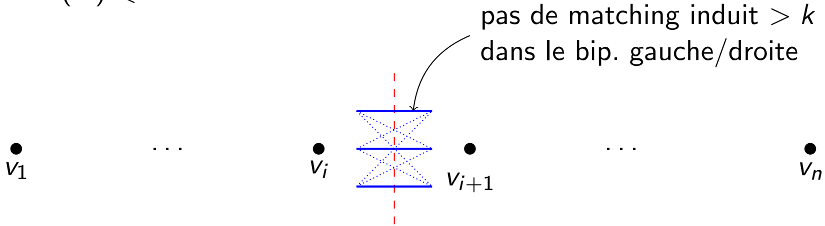


Ex : C_5

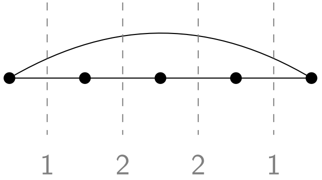


Largeur mim linéaire

$\text{lmim}(G) \leqslant k$ s'il existe un ordre



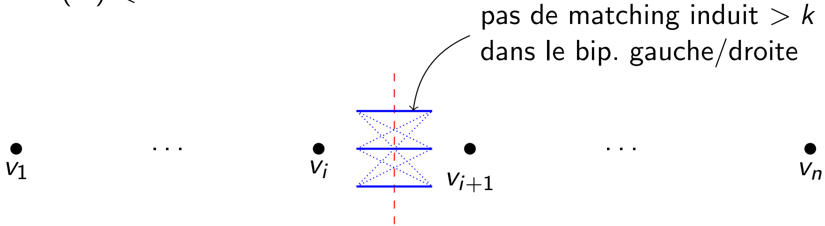
Ex : C_5



$\text{lmim}(C_5) \leqslant 2$

Largeur mim linéaire

$\mathrm{lmim}(G) \leqslant k$ s'il existe un ordre



Intérêt

De nombreux problèmes peuvent être résolus en temps $n^{O(\mathrm{lmim})}$ (même $n^{O(\mathrm{mim})}$).

Les H-graphes ont largeur mim bornée

Theorem (Belmonte, Vatshelle 2013)

- *Tout graphe d'intervalles a* $\mathrm{lmim} \leqslant 1$.
- *Tout graphe d'intervalles circulaire a* $\mathrm{lmim} \leqslant 2$.

Les H-graphes ont largeur mim bornée

Theorem (Belmonte, Vatshelle 2013)

- *Tout graphe d'intervalles a* lmim $\leqslant 1$.
- *Tout graphe d'intervalles circulaire a* lmim $\leqslant 2$.

Theorem (Fomin, Golovach, R. 2017)

Tout H-graphe a lmim $\leqslant 2\|H\|$.

Les H-graphes ont largeur mim bornée

Theorem (Belmonte, Vatshelle 2013)

- *Tout graphe d'intervalles a* lmim $\leqslant 1$.
- *Tout graphe d'intervalles circulaire a* lmim $\leqslant 2$.

Theorem (Fomin, Golovach, R. 2017)

Tout H-graphe a lmim $\leqslant 2\|H\|$.

Conséquence (Bui-Xuan, Arne Telle, Vatshelle 2013) : à H fixé,

- Dominant Pondéré,
- Indépendant Pondéré,
- Couplage Induit,
- Long Chemin Induit,
- Coupe Cycles,
- ...

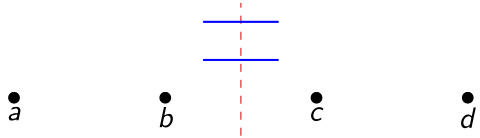
peuvent être résolus en temps polynomial sur les H-graphes (XP).

Largeur mim des H-graphes : la preuve 1/2

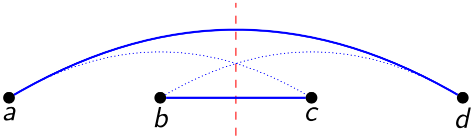
Pour un graphe d'intervalle : on ordonne les sommets par leur extrémité de gauche.

Pour un graphe d'intervalle : on ordonne les sommets par leur extrémité de gauche.

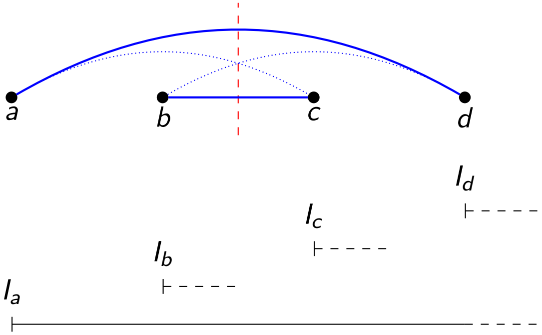
Pour un graphe d'intervalle : on ordonne les sommets par leur extrémité de gauche.



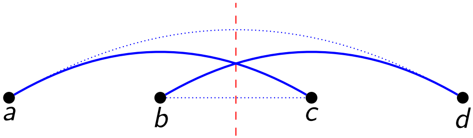
Pour un graphe d'intervalle : on ordonne les sommets par leur extrémité de gauche.



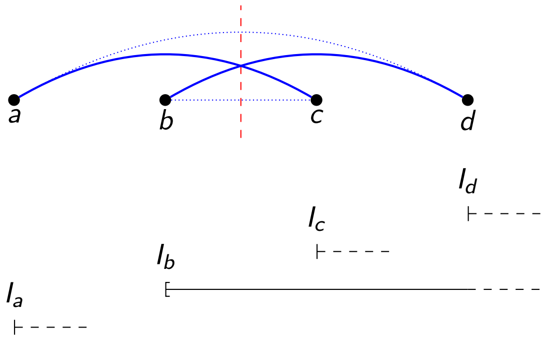
Pour un graphe d'intervalle : on ordonne les sommets par leur extrémité de gauche.



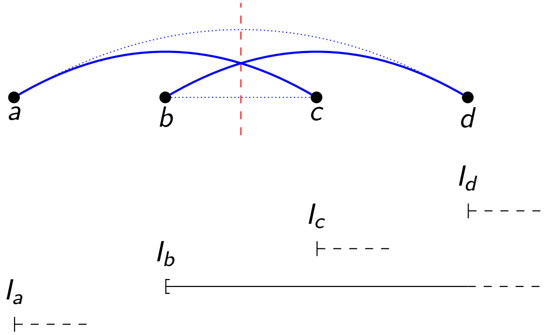
Pour un graphe d'intervalle : on ordonne les sommets par leur extrémité de gauche.



Pour un graphe d'intervalle : on ordonne les sommets par leur extrémité de gauche.

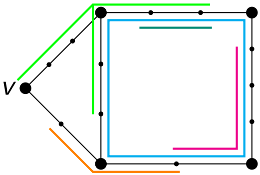


Pour un graphe d'intervalle : on ordonne les sommets par leur extrémité de gauche.

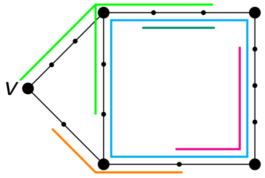


Conclusion : lmim(interval) $\leqslant 1$.

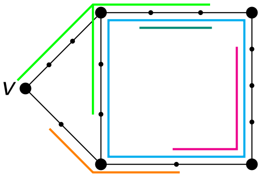
Pour un H-graphe : on ordonne les sommets par distance d'un sommet $v \in V(H)$ arbitraire.

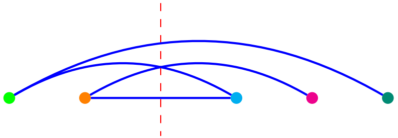


Pour un H-graphe : on ordonne les sommets par distance d'un sommet $v \in V(H)$ arbitraire.

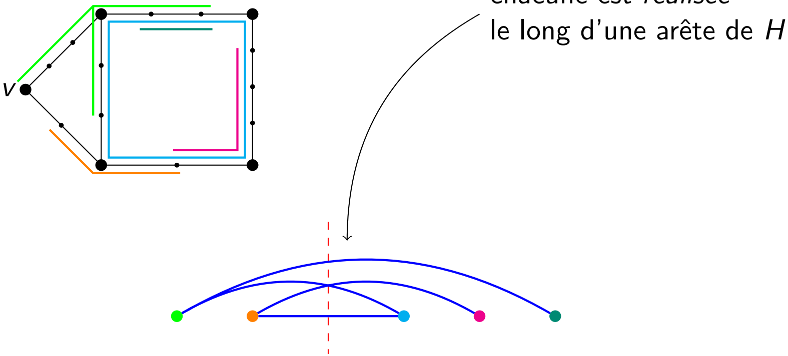


Pour un H-graphe : on ordonne les sommets par distance d'un sommet $v \in V(H)$ arbitraire.

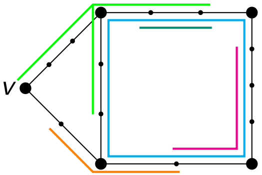




Pour un H-graphe : on ordonne les sommets par distance d'un sommet $v \in V(H)$ arbitraire.

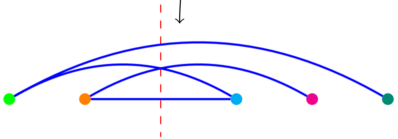


Pour un H-graphe : on ordonne les sommets par distance d'un sommet $v \in V(H)$ arbitraire.



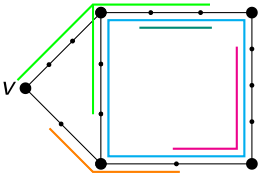
chacune est *réalisée*
le long d'une arête de H

le long de chaque arête de H :
lmim $\leqslant 1$ ($\sim$ interval)



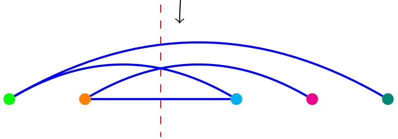
Largeur mim des H-graphes : la preuve 2/2

Pour un H-graphe : on ordonne les sommets par distance d'un sommet $v \in V(H)$ arbitraire.



chacune est *réalisée* le long d'une arête de H

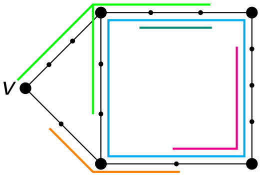
le long de chaque arête de H : lmim $\leqslant 1$ ($\sim$ interval)



Conclusion : lmim(H-graphe) $\leqslant \|H\|$?

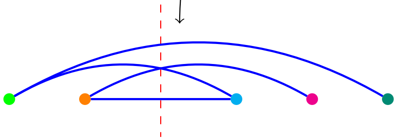
Largeur mim des H-graphes : la preuve 2/2

Pour un H-graphe : on ordonne les sommets par distance d'un sommet $v \in V(H)$ arbitraire.



chacune est *réalisée* le long d'une arête de H

le long de chaque arête de H : lmim $\leqslant 1$ ($\sim$ interval)



Conclusion : $\text{lmim}(H\text{-graphe}) \leqslant 2 \cdot \|H\|$.

Séparateurs minimaux

$X \subseteq V(G)$ est un *séparateur minimal* de G si c'est un séparateur et aucun $Y \subseteq X$ n'est un séparateur.

Séparateurs minimaux

$X \subseteq V(G)$ est un *séparateur minimal* de G si c'est un séparateur et aucun $Y \subseteq X$ n'est un séparateur.

En général leur $\#$ peut être exponentiel en n ; Intervalle (circ.) : poly(n).

$X \subseteq V(G)$ est un *séparateur minimal* de G si c'est un séparateur et aucun $Y \subsetneq X$ n'est un séparateur.

En général leur # peut être exponentiel en n ; Intervalle (circ.) : poly(n).

Theorem (Fomin, Golovach, R. 2017)

Tout H-graphe a au plus $n^{O(\|H\|)}$ séparateurs minimaux.

Il y a des H-graphes avec $\Omega\left(\left(\frac{n}{\|H\|}\right)^{\|H\|}\right)$ séparateurs minimaux.

Séparateurs minimaux

$X \subseteq V(G)$ est un *séparateur minimal* de G si c'est un séparateur et aucun $Y \subsetneq X$ n'est un séparateur.

En général leur $\#$ peut être exponentiel en n ; Intervalle (circ.) : poly(n).

Theorem (Fomin, Golovach, R. 2017)

Tout H-graphe a au plus $n^{O(\|H\|)}$ séparateurs minimaux.

Il y a des H-graphes avec $\Omega\left(\left(\frac{n}{\|H\|}\right)^{\|H\|}\right)$ séparateurs minimaux.

Conséquence (Fomin, Todinca, Villanger 2015) : à H fixé,

- Couv. par Sommets,
- Coupe Cycles,
- Largeur Arb.,
- Suppression de Mineur Planaire,
- Triangles Indép., ...

peuvent être résolus en temps polynomial sur les H-graphes (XP).

Complexité paramétrée

Analyse de la complexité en fonction de n et d'un paramètre k.

Complexité paramétrée

Analyse de la complexité en fonction de n et d'un paramètre k.

P n^c

Complexité paramétrée

Analyse de la complexité en fonction de n et d'un paramètre k.

P	n^c
NP-dur	"sans doute pas P"

Analyse de la complexité en fonction de n et d'un paramètre k.

P	n^c
NP-dur	"sans doute pas P"
XP	$n^{g(k)}$

Complexité paramétrée

Analyse de la complexité en fonction de n et d'un paramètre k.

P	n^c
NP-dur	"sans doute pas P"
XP	$n^{g(k)}$
FPT	$f(k) \cdot n^c$

Complexité paramétrée

Analyse de la complexité en fonction de n et d'un paramètre k.

P	n^c
NP-dur	"sans doute pas P"
XP	$n^{g(k)}$
FPT	$f(k) \cdot n^c$
W[1]-dur	"sans doute pas FPT"

Ensemble Dominant

Dominant

Entrée : (G, k)
Paramètre : k ou $k + \|H\|$
Question : G a-t-il un dominant de taille $\leqslant k$?

Ensemble Dominant

Dominant

Entrée : (G, k)
Paramètre : k ou $k + \|H\|$
Question : G a-t-il un dominant de taille $\leqslant k$?

Theorem (Chaplick et al. 2017)

Paramétré par $\|H\|$, DOMINANT *dans les* H*-graphes est XP en général et FPT si* H *est une étoile.*

Ensemble Dominant

Dominant

Entrée : (G, k)
Paramètre : k ou $k + \|H\|$
Question : G a-t-il un dominant de taille $\leqslant k$?

Theorem (Chaplick et al. 2017)

Paramétré par $\|H\|$, Dominant *dans les H-graphes est XP en général et FPT si H est une étoile.*

Theorem (Fomin, Golovach et R., 2017)

Paramétré par $k + \|H\|$, Dominant *dans les H-graphes est W[1]-dur en général et FPT si H est un arbre.*

Ensemble indépendant

Indépendant

Entrée : (G, k)
Paramètre : k ou $k + \|H\|$
Question : G a-t-il un indépendant de taille $\leqslant k$?

Ensemble indépendant

Indépendant

Entrée : (G, k)
Paramètre : k ou $k + \|H\|$
Question : G a-t-il un indépendant de taille $\leqslant k$?

Theorem (Chaplick et al. 2017)

Paramétré par $\|H\|$, INDÉPENDANT dans les H-graphes est XP.

Ensemble indépendant

Indépendant

Entrée : (G, k)
Paramètre : k ou $k + \|H\|$
Question : G a-t-il un indépendant de taille $\leqslant k$?

Theorem (Chaplick et al. 2017)

Paramétré par $\|H\|$, Indépendant *dans les H-graphes est XP.*

Theorem (Fomin, Golovach et R., 2017)

Paramétré par $k + \|H\|$, Indépendant *dans les H-graphes est W[1]-dur.*

Résultats de complexité paramétrée sur les H-graphes

Problème	Param.	Restrictions	Complexité	Ref.
Dom.	$\|H\|$	H est une étoile	FPT	[CTVZ17]
		aucune	XP	
	$\|H\| + k$	H est un arbre	FPT	ce papier
		aucune	W[1]-dur	ce papier
Indep.	$\|H\|$	H est un arbre	polynomial	[G72]
		aucune	XP	[CTVZ17]
	$\|H\| + k$	aucune	W[1]-dur	ce papier
Clique	$\|H\|$	H est un arbre	polynomial	[G72]
		H est un cactus	polynomial	[CZ17]
		aucune	W[1]-dur	ce papier
	$\|H\| + k$	aucune	FPT	[CZ17]
			poly. kernel	ce papier

[G72] : Gavril, 1972 ;

[CTVZ17] : Chaplick, Toepfer, Voborník, Zeman, WG 2017 ;

[CZ17] : Chaplick, Zeman, 2017.

Problèmes solubles et insolubles

Problèmes solubles et insolubles

Deux propriétés des H-graphes :

- largeur mim bornée ;
- nombre polynomial de séparateurs minimaux.

Problèmes solubles et insolubles

Deux propriétés des H-graphes :

- largeur mim bornée ;
- nombre polynomial de séparateurs minimaux.

$\rightsquigarrow$ algorithmes polynomiaux pour de nombreux problèmes

Problèmes solubles et insolubles

Deux propriétés des H-graphes :

- largeur mim bornée ;
- nombre polynomial de séparateurs minimaux.

$\rightsquigarrow$ algorithmes polynomiaux pour de nombreux problèmes

Problèmes paramétrés Dominant, Indépendant et Clique :

- preuves de W[1]-difficulté ;
- algos FPT.

(selon H et les paramétrisations considérées)

Un problème pour la fin

Theorem (Chaplick et al. 2017)

Décider si un graphe est un H-graphe est :

Un problème pour la fin

Theorem (Chaplick et al. 2017)

Décider si un graphe est un H-graphe est :

- *NP-complet si H a le diamant comme mineur ;*

Theorem (Chaplick et al. 2017)

Décider si un graphe est un H-graphe est :

- *NP-complet si H a le diamant comme mineur ;*
- *polynomial si H est une étoile ($O(n^4)$) ;*

Un problème pour la fin

Theorem (Chaplick et al. 2017)

Décider si un graphe est un H-graphe est :

- *NP-complet si H a le diamant comme mineur ;*
- *polynomial si H est une étoile ($O(n^4)$) ;*
- *XP is H est un arbre.*

Un problème pour la fin

Theorem (Chaplick et al. 2017)

Décider si un graphe est un H-graphe est :

- *NP-complet si H a le diamant comme mineur ;*
- *polynomial si H est une étoile* ($O(n^4)$) *;*
- *XP is H est un arbre.*

Question (Chaplick et al. 2017)

Si H est un cactus, peut-on reconnaître les H-graphes en temps polynomial ?

Un problème pour la fin

Theorem (Chaplick et al. 2017)

Décider si un graphe est un H-graphe est :

- *NP-complet si H a le diamant comme mineur ;*
- *polynomial si H est une étoile ($O(n^4)$) ;*
- *XP is H est un arbre.*

Question (Chaplick et al. 2017)

Si H est un cactus, peut-on reconnaître les H-graphes en temps polynomial ?

Merci !