

# Stratégies de captures de fugitifs

## Ou l'application de la théorie des graphes à PacMan™

VINCENT LIMOUZY et FABIEN DE MONTGOLFIER

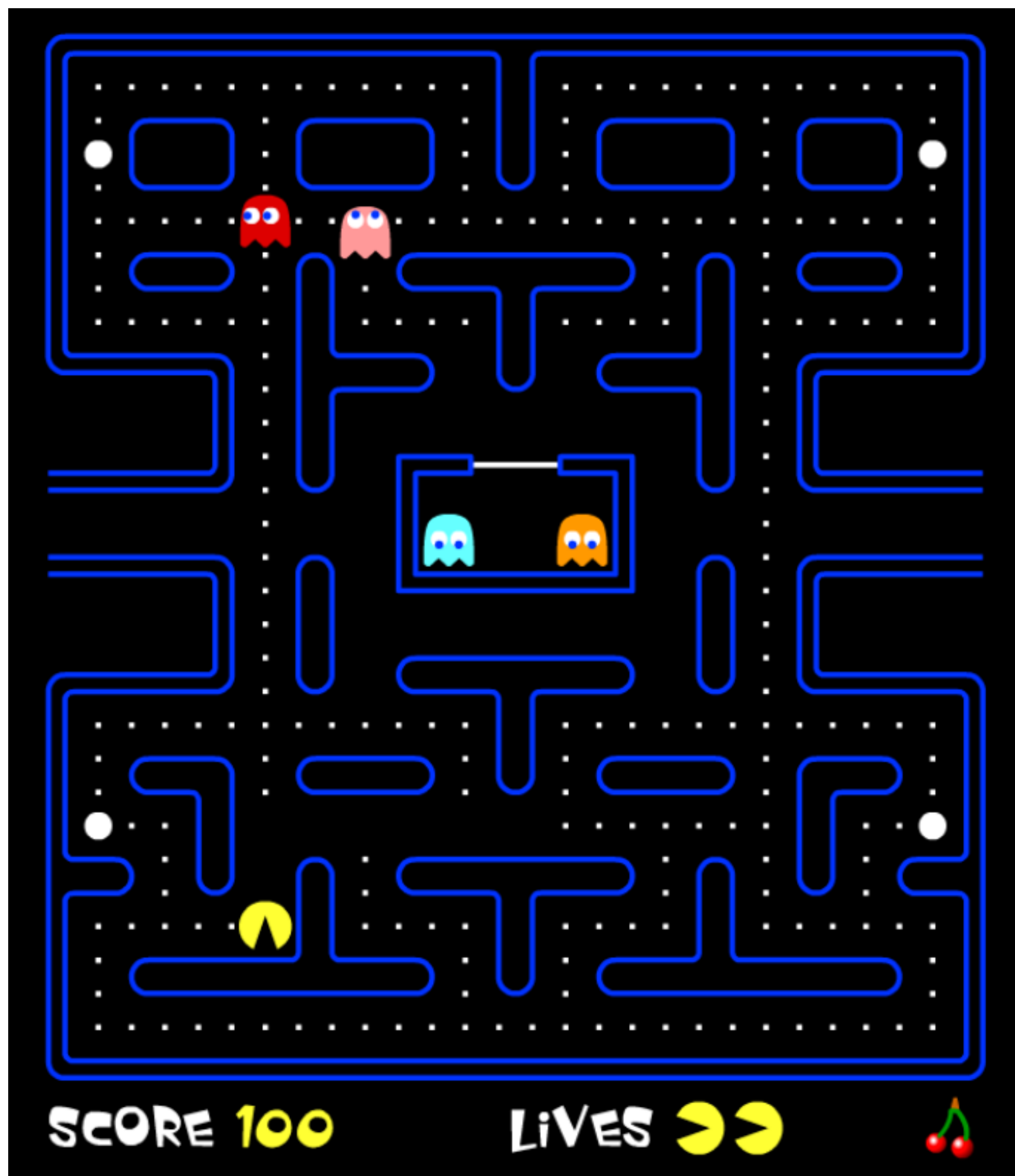
Laboratoire d'Informatique Algorithmique : Fondements et Applications — Université Paris Diderot

### PacMan™

#### PacMan™ : le jeu

PacMan™ est un jeu sorti en 1979 sur processeur z80 (en salles d'arcades). De nombreux clones en ont été faits depuis.

Le héros se déplace dans un labyrinthe et doit manger toutes les PacGommes, en évitant les fantômes.



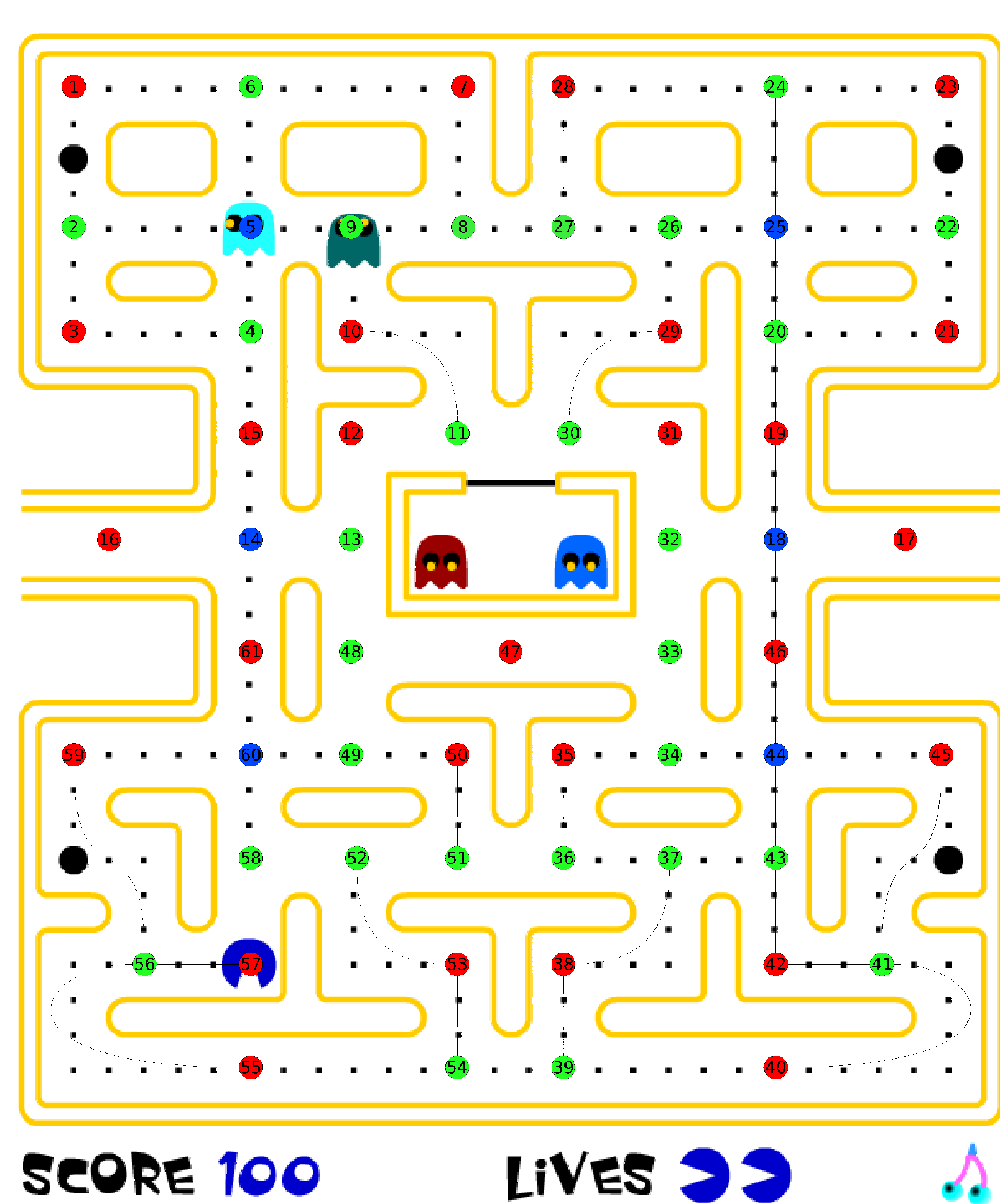
#### PacMan™ : le modèle

La question : Dans le jeu original, les fantômes font des mouvements "aléatoires" (ils bougent au hasard). Mais, si les fantômes étaient intelligents, pourraient-ils attraper PacMan?

Pour y répondre, on va **modéliser** le labyrinthe de PacMan comme un **graphe**.

Un **graphe** est un ensemble de **cases**, ou sommets, reliées en elles par des **arêtes**.

Ici, les sommets sont les carrefours du labyrinthe et les arêtes sont les couloirs.



### LES JEUX DE GENDARMES ET DE VOLEUR

#### La règle du jeu !

Les joueurs :  
Un jeu de gendarmes et voleur se joue à deux joueurs, sur un **graphe** (des **cases**, reliées par des **arêtes**).  
Un joueur joue LES gendarmes, et l'autre LE voleur.

Les mouvements :  
Chaque joueur joue à tour de rôle, en déplaçant des pions sur le graphe. Les pions se trouvent forcément sur une case du graphe.  
Quand le *gendarme* joue, il peut déplacer ses pions "gendarme" d'**une** arête chacun. Il peut déplacer **tous** ses pions si il veut, en un tour.  
Quand le *voleur* joue, il peut déplacer son pion "voleur" de **plusieurs** arêtes, autant qu'il veut. Mais sans passer par un sommet qui contient un pion "gendarme"!

Hé oui, le voleur est beaucoup plus rapide!  
*Mais* il y a plus de gendarmes.

Qui va gagner ?  
Début de partie :  
Les gendarmes partent tous de la "maison" et le voleur d'où il veut.

Condition de victoire :  
Le gendarme gagne s'il amène un pion "gendarme" sur la même case que le pion "voleur".  
Le voleur gagne si le gendarme ne l'a pas attrapé en 30 coups.

#### Et les mathématiques, dans tout ça ?

En fait, on peut savoir à l'avance qui va gagner. Le jeu est truqué !  
S'il y a peu de pions gendarmes, le voleur gagne.  
Et s'il y a beaucoup de pions gendarmes, le gendarme gagne!  
Le *seuil*, c'est-à-dire le nombre minimal de gendarmes qu'il faut pour gagner, dépend de la forme du graphe.

#### La décomposition en arbre

La **décomposition en arbre** (en anglais : *tree decomposition*) est un puissant outil mathématique.  
Il permet de trouver le seuil, c'est-à-dire de répondre à la question :  
Étant donné mon graphe, de combien de gendarmes j'ai besoin au minimum pour attraper le voleur ?

#### Et pour PacMan ?

La réponse est : il faut au moins **4** fantômes pour attraper PacMan.  
Alors, pourquoi le joueur (qui joue le "voleur") peut-il gagner quand même ?  
Parce que les fantômes n'ont pas la bonne **stratégie** pour capturer PacMan. Au lieu de ça, il bougent au hasard ! Et puis, il y a les PacGommes...

### EXPLICATION MATHÉMATIQUE

Attention, partie réservée aux experts !

#### Les boîtes de décomposition

Une décomposition en arbre d'un graphe est un ensemble de boîtes. Dans chaque boîte, on écrit le nom de plusieurs sommets du graphe. Un sommet peut apparaître dans plusieurs boîtes.

La décomposition en arbre est un ensemble de boîtes qui sont reliées entre elles par des traits.

- Elle doit vérifier les **axiomes** suivants :
1. Les traits ne forment pas de cycle
  2. Pour chaque arête du graphe, les sommets aux deux extrémités doivent apparaître ensemble dans une boîte
  3. Si un même sommet apparaît dans plusieurs boîtes, celles-ci sont reliées ensemble par des traits

Bien sûr, il existe énormément de décompositions en arbre d'un même graphe !

#### Le théorème de Seymour et Thomas [1993]

La **largeur** d'une décomposition en arbre est le *plus grand nombre de sommets contenus ensemble dans une boîte*, moins 1 (pour des raisons techniques).

La **largeur d'arbre** d'un graphe (en anglais : *treewidth*) est la plus petite largeur possible d'une de ses décomposition en arbre.

C'est un nombre entier, compris entre 1 et le nombre de sommets du graphe.

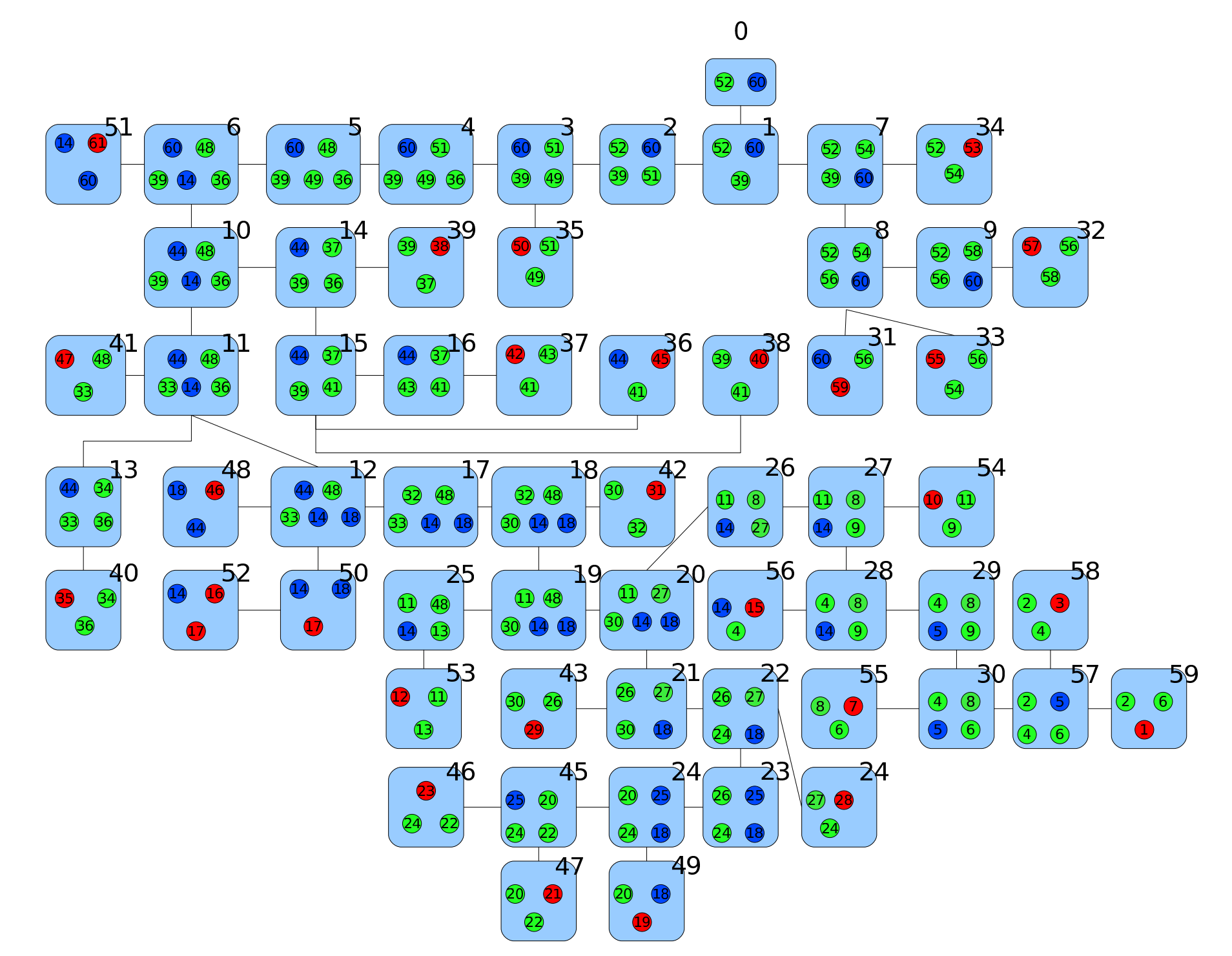
Les grands mathématiciens américains Seymour et Thomas ont prouvé en 1993 le théorème suivant :

La largeur d'arbre d'un graphe est exactement le nombre minimal de gendarmes nécessaires pour attraper le voleur

#### Et PacMan™ dans tout ça ?

Voilà la décomposition en arbre du graphe de PacMan ! C'est la preuve que 4 fantômes peuvent attraper PacMan, car la plus grosse boîte contient seulement cinq sommets.

La trouver demande des calculs très durs : il s'agit en effet d'un problème **NP-complet**, c'est-à-dire qu'on ne sait pas résoudre en un temps polynomial en la taille des données, mais seulement en temps exponentiel !



#### Le théorème de Courcelle

Bruno Courcelle, informaticien français, a montré en 1990 que si la *largeur d'arbre* d'un graphe est petite, alors on sait efficacement résoudre sur ce graphe de nombreux problèmes NP-complets, donc durs !

C'est un résultat théorique très puissant ! Donc la décomposition en arbre ne sert pas qu'à attraper PacMan, mais a de vraies applications !