



Stage de Master sur l'énumération des Cliques Maximales Potentielles

Nicolas Schivre

26 juin 2025

Plan

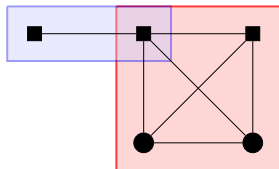
- 1 Graphes : définitions et propriétés
- 2 État de l'art
 - Complexité d'énumération
 - Techniques d'énumération
 - Clique Maximale Potentielle
 - Définition des Cliques Maximales Potentielles
- 3 Énumération des cliques maximales potentielles
 - Extension d'un a, b -séparateur minimal
 - Extension d'une PMC
 - Extension d'une PMC S-Actif

Graphes : définitions et propriétés

Définitions et propriétés

Clique

Ensemble de sommets 2 à 2 voisins. Maximal si ne peut être aggrandit.



Définitions et propriétés

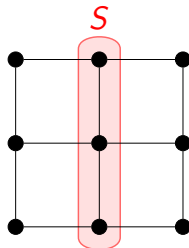
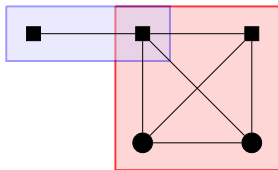
Clique

Ensemble de sommets 2 à 2 voisins. Maximal si ne peut être aggrandi.

Séparateur

Ensemble de sommets S tel que $G \setminus S$ est déconnecté. S est minimal si tout sous-ensemble n'est pas un séparateur.

Deux séparateurs S et T sont parallèles si il existe une composante connexe C de $G \setminus S$ tel que $T \subseteq S \cup C$.



Définitions et propriétés

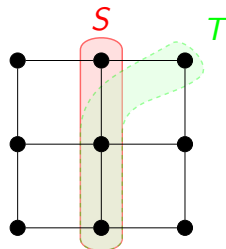
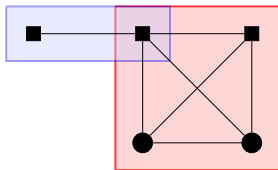
Clique

Ensemble de sommets 2 à 2 voisins. Maximal si ne peut être aggrandi.

Séparateur

Ensemble de sommets S tel que $G \setminus S$ est déconnecté. S est minimal si tout sous-ensemble n'est pas un séparateur.

Deux séparateurs S et T sont parallèles si il existe une composante connexe C de $G \setminus S$ tel que $T \subseteq S \cup C$.



Définitions et propriétés

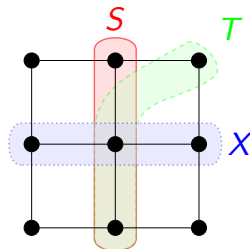
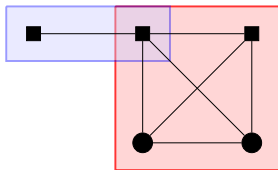
Clique

Ensemble de sommets 2 à 2 voisins. Maximal si ne peut être aggrandi.

Séparateur

Ensemble de sommets S tel que $G \setminus S$ est déconnecté. S est minimal si tout sous-ensemble n'est pas un séparateur.

Deux séparateurs S et T sont parallèles si il existe une composante connexe C de $G \setminus S$ tel que $T \subseteq S \cup C$.



Définitions et propriétés

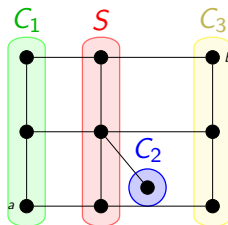
Full component

Un ensemble S admet une full component C si $\forall v \in S, N(v) \cap C \neq \emptyset$.

Définitions et propriétés

Full component

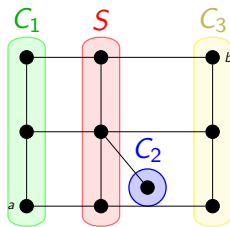
Un ensemble S admet une full component C si $\forall v \in S, N(v) \cap C \neq \emptyset$.



Définitions et propriétés

Full component

Un ensemble S admet une full component C si $\forall v \in S, N(v) \cap C \neq \emptyset$.



Lemmes

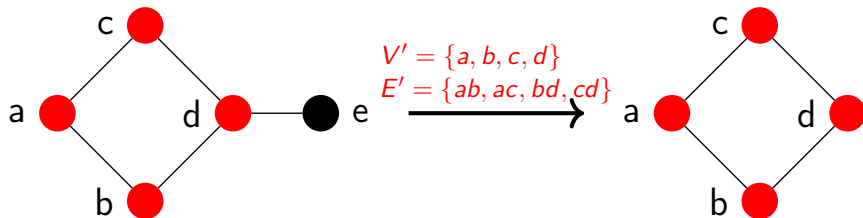
- FOLKLORE : Pour tout graphe G avec $a, b \in V$, et tout a, b -séparateur $S \subset V$ de G , S est minimal ssi $\forall v \in S$, il y a un chemin de a vers b qui intersecte S seulement en v .
- Un séparateur minimal admet au moins 2 full components.

Graphe cordal

Sous-graphe

Un sous-graphe induit de G est un graphe $G' = (V', E')$ où $V' \subseteq V$ et $E' = \{uv, \forall u, v \in V' : uv \in E\}$.

G' est un cycle induit (ou trou) de G si G' est un sous-graphe induit de G et G' est un cycle.

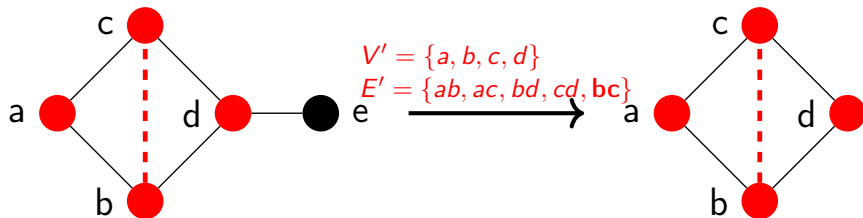


Graphe cordal

Sous-graphe

Un sous-graphe induit de G est un graphe $G' = (V', E')$ où $V' \subseteq V$ et $E' = \{uv, \forall u, v \in V' : uv \in E\}$.

G' est un cycle induit (ou trou) de G si G' est un sous-graphe induit de G et G' est un cycle.



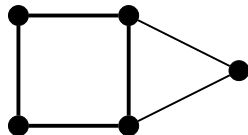
Corde

Arête entre deux sommets non adjacents d'un cycle.

Graphe cordal

Graphe cordal

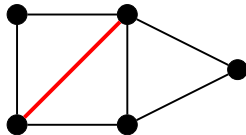
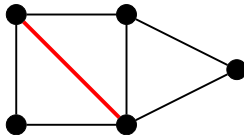
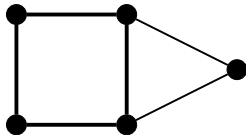
Un graphe G est dit cordal si il ne possède pas de cycle induit de longueur au moins 4.



Graphe cordal

Graphe cordal

Un graphe G est dit cordal si il ne possède pas de cycle induit de longueur au moins 4.



Triangulation

Une triangulation est une opération d'ajout d'arêtes dans un graphe dans le but de le rendre cordal. Elle est dite minimale si enlever une arête de la triangulation crée un trou.

État de l'art

Problèmes d'énumération

Définition

On cherche à trouver toutes les solutions du problèmes.

En général, on se restreint aux solutions dites minimales/maximales car il n'est pas rare que trouver **une** solution minimum/maximum est dur (problèmes d'optimisation NP-complet).

Problèmes d'énumération

Définition

On cherche à trouver toutes les solutions du problèmes.

En général, on se restreint aux solutions dites minimales/maximales car il n'est pas rare que trouver **une** solution minimum/maximum est dur (problèmes d'optimisation NP-complet).

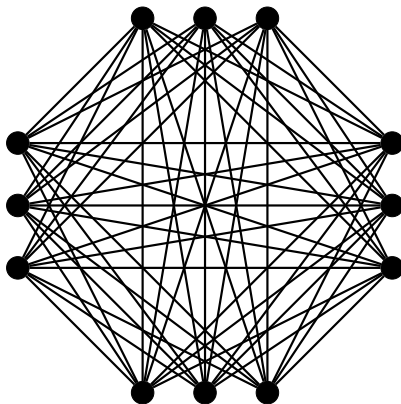
Deux approches

- Input-sensitive : Complexité sur la taille de l'entrée de la forme $O(a^n)$.
- **Output-sensitive** : Complexité sur la taille de l'entrée et de la sortie.

Un nombre exponentiel de solutions

Le cas des cliques maximales

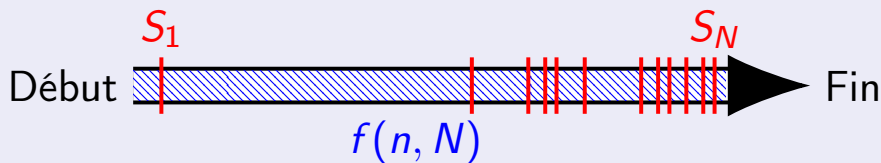
Une borne supérieure sur le nombre de cliques maximales de $3^{n/3}$ (par MOON et MOSER 1965).



3 classes de complexités (JOHNSON, YANNAKAKIS, PAPADIMITRIOU 1988)

Output polynomial algorithm

n : nombre de sommets. | N : nombre de solutions. | c : constante.

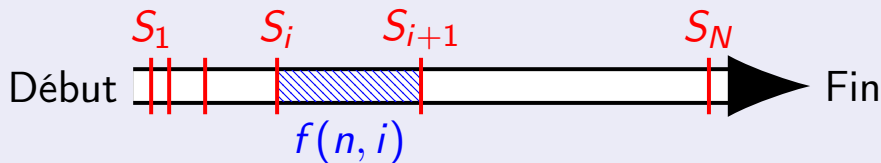


$$O((n + N)^c) \text{ total}$$

3 classes de complexités (JOHNSON, YANNAKAKIS, PAPADIMITRIOU 1988)

Incremental polynomial algorithm

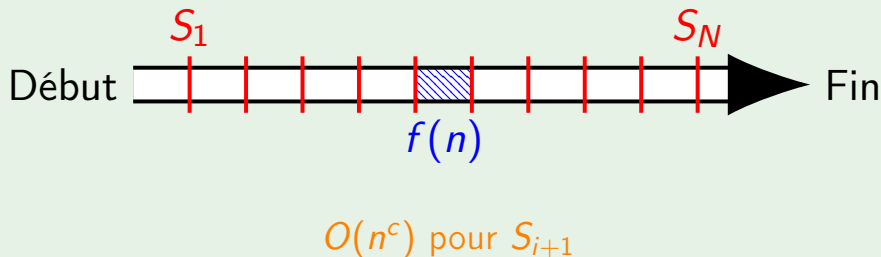
L_i : solutions trouvées à l'étape i .



$$O(n|L_i|^c) \text{ pour } S_{i+1}$$

3 classes de complexités (JOHNSON, YANNAKAKIS, PAPADIMITRIOU 1988)

Polynomial delay algorithm



Techniques d'énumération

Flashlight Search (READ et TARJAN 1975)

Principe : résolution d'un problème d'extension

- Création et exploration d'un arbre où les feuilles représentent des solutions.
- Résolution d'un problème de décision à chaque étape afin de savoir si on explore le sous-arbre.

Schéma de problème d'extension

Entrée: Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $M \subset V$ de sommets obligatoires, un sous-ensemble $F \subset V$ de sommets interdits tel que $M \cap F = \emptyset$ et une propriété P à satisfaire.

Question: Est-ce qu'il existe X , un ensemble de sommets avec $M \subseteq X$, $X \cap F = \emptyset$ et tel que X satisfait P ?

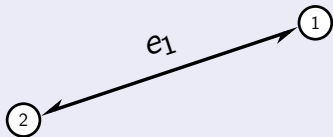
Flashlight Search (READ et TARJAN 1975)

Exemple de fonctionnement avec $V = \{e_1, e_2, e_3\}$

①

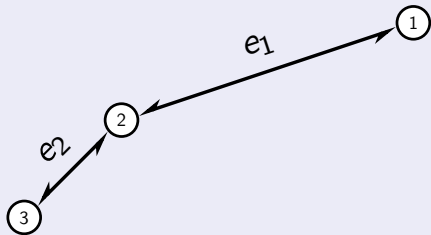
Flashlight Search (READ et TARJAN 1975)

Exemple de fonctionnement avec $V = \{e_1, e_2, e_3\}$



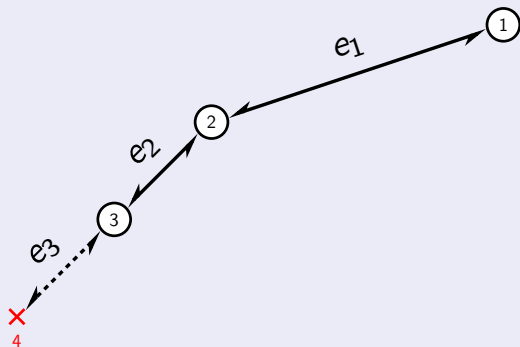
Flashlight Search (READ et TARJAN 1975)

Exemple de fonctionnement avec $V = \{e_1, e_2, e_3\}$



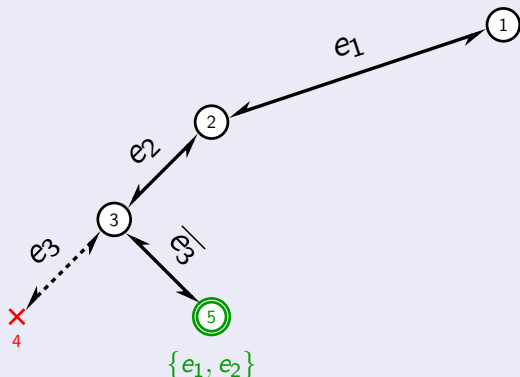
Flashlight Search (READ et TARJAN 1975)

Exemple de fonctionnement avec $V = \{e_1, e_2, e_3\}$



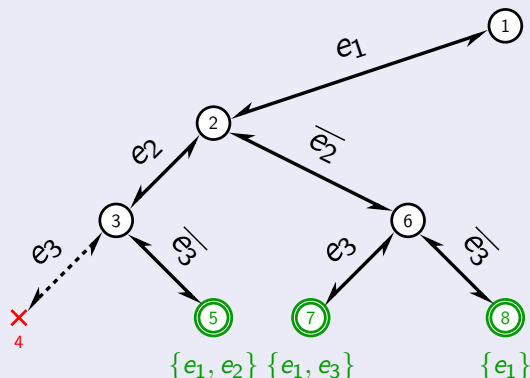
Flashlight Search (READ et TARJAN 1975)

Exemple de fonctionnement avec $V = \{e_1, e_2, e_3\}$



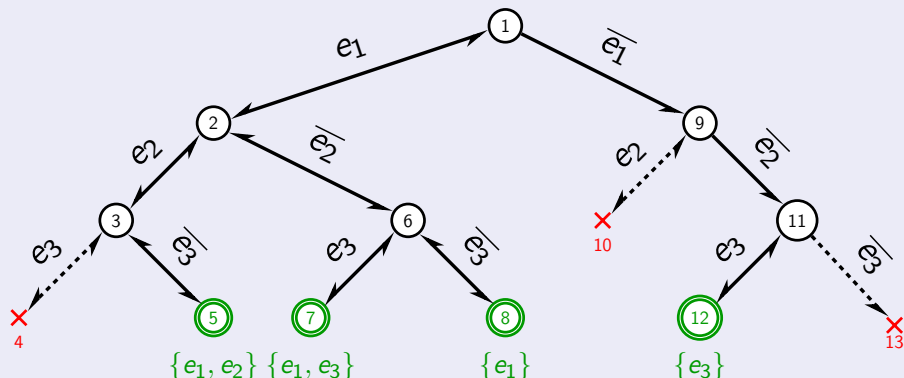
Flashlight Search (READ et TARJAN 1975)

Exemple de fonctionnement avec $V = \{e_1, e_2, e_3\}$



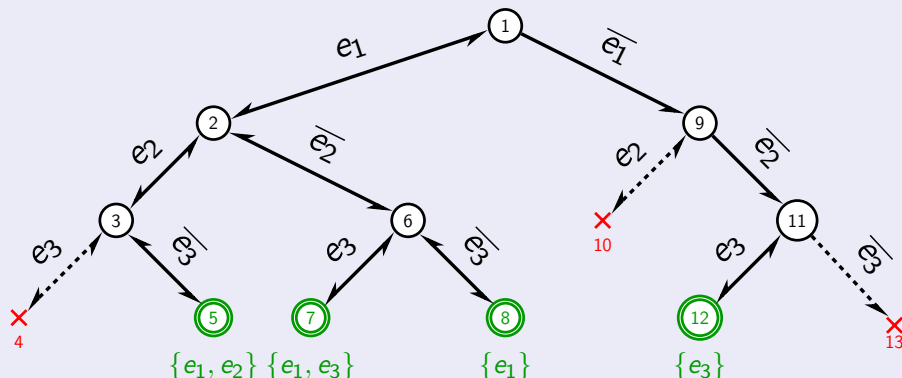
Flashlight Search (READ et TARJAN 1975)

Exemple de fonctionnement avec $V = \{e_1, e_2, e_3\}$



Flashlight Search (READ et TARJAN 1975)

Exemple de fonctionnement avec $V = \{e_1, e_2, e_3\}$



Conséquences

Permet un algorithme à délai polynomial et espace polynomial.

Clique Maximale Potentielle

Motivations

- Première apparition dans un article de VINCENT BOUCHITTÉ et IOAN TODINCA en 1998 sous le nom de *maximal set of neighbour separators*.
- Renommé depuis 1999 en Cliques Maximales Potentielles.

Applications aux décompositions

- Calcul de la largeur arborescente (treewidth)
- Factorisation de Cholesky : lien avec la taille des matrices.
- Utilisation d'algorithmes Fixed-Parameter Tractable (FPT).

Motivations

Premiers résultats

- Un algorithme capable de les énumérer avec une complexité *output polynomial* quadratique $O(N^2)$.
- Si $N = O(n^c)$ alors **treewidth calculable en temps polynomial**.

Applications structurelles

- Théorie de l'évolution : résolution du Perfect Phylogeny problem.^a
- Algorithme polynomial pour résoudre Max Independent set dans les P_5 -free.^b
- Algorithme polynomial pour résoudre Feedback Vertex set dans les P_5 -free.^c

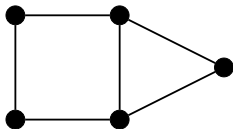
a. GYSEL 2013, <http://arxiv.org/abs/1303.3931>

b. LOKSHANOV, VATSHELLE et VILLANGER 2014, SODA

c. ABRISHAMI, CHUDNOVSKY, PILIPCZUK, RZAZEWSKI et SEYMOUR 2020

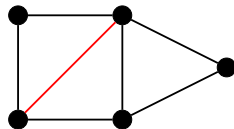
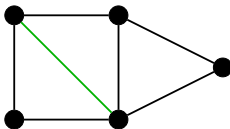
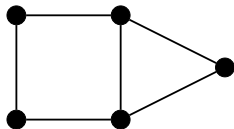
Définition

Une *Clique Maximale Potentielle* (PMC) est une clique maximale qui apparaît dans au moins une triangulation minimale.



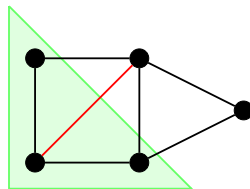
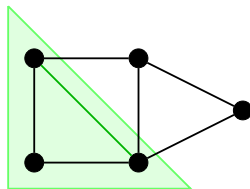
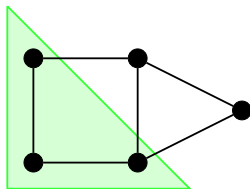
Définition

Une Clique Maximale Potentielle (PMC) est une clique maximale qui apparaît dans au moins une triangulation minimale.



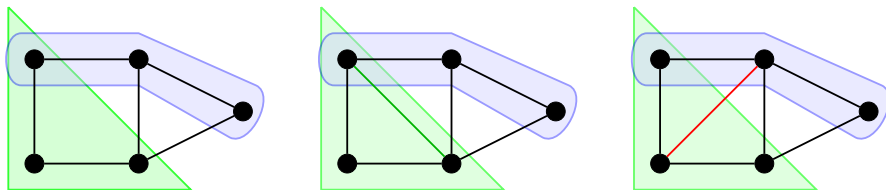
Définition

Une Clique Maximale Potentielle (PMC) est une clique maximale qui apparait dans au moins une triangulation minimale.



Définition

Une *Clique Maximale Potentielle* (PMC) est une clique maximale qui apparait dans au moins une triangulation minimale.

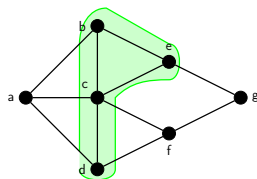


Définition

Caractérisation (BOUCHITTÉ et TODINCA 2002)

Un ensemble Ω est une PMC si :

1. Ω n'admet pas de full component.
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in \Omega$, soit $uv \in E$ ou il existe une composante connexe C de $G \setminus \Omega$ tel que $N(u) \cap C \neq \emptyset$ et $N(v) \cap C \neq \emptyset$.



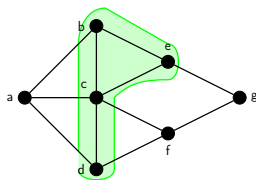
PMC valide

Définition

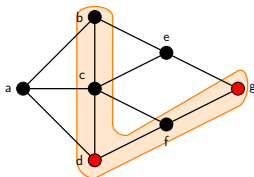
Caractérisation (BOUCHITTÉ et TODINCA 2002)

Un ensemble Ω est une PMC si :

1. Ω n'admet pas de full component.
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in \Omega$, soit $uv \in E$ ou il existe une composante connexe C de $G \setminus \Omega$ tel que $N(u) \cap C \neq \emptyset$ et $N(v) \cap C \neq \emptyset$.



PMC valide



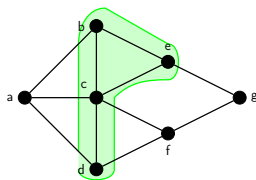
d et g non connectés

Définition

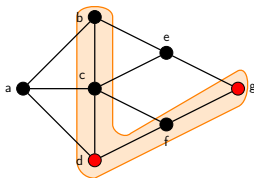
Caractérisation (BOUCHITTÉ et TODINCA 2002)

Un ensemble Ω est une PMC si :

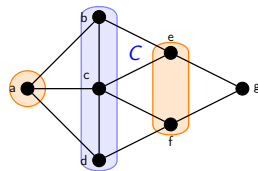
1. Ω n'admet pas de full component.
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in \Omega$, soit $uv \in E$ ou il existe une composante connexe C de $G \setminus \Omega$ tel que $N(u) \cap C \neq \emptyset$ et $N(v) \cap C \neq \emptyset$.



PMC valide



d et g non connectés



C est une full component

Algorithme output quadratique de BOUCHITTÉ et TODINCA 2002

Solution de sous-graphes

Dans cet algorithme, on cherche les solutions dans un sous-graphe G_i (graphe G restreint à $i \leq |V|$ sommets).

G_{i+1} est l'union de G_i et d'un sommet $a \in V \setminus V[G_i]$.

Disjonction de cas

Pour construire les PMC de G_{i+1} , l'algorithme test 4 cas :

1. $\Omega = \Omega' \cup \{a\}$ avec Ω' une PMC de G_i .
2. $\Omega = \Omega'$ avec Ω' une PMC de G_i .
3. $\Omega = S \cup \{a\}$ avec S un séparateur minimal de G_{i+1}
4. $\Omega = S \cup (C \cap T)$ avec S, T deux séparateur minimaux de G_{i+1} et C une composante connexe de $G_{i+1} \setminus S$.

Séparateur actif et PMC S-Actif

Correspond aux PMC trouvé via le cas n°4 de l'algorithme de BOUCHITTÉ et TODINCA.

Définition

Ω une PMC de G , Δ_Ω l'ensemble des séparateurs de Ω et S un séparateur minimal.

$\Omega' = \Omega$ auquel on ajoute des arêtes entre tout les sommets des séparateur $X \subseteq \Delta_\Omega \setminus S$ de sorte que tout X forme une clique.

Si Ω' n'est pas une clique, alors S est actif. Sinon S est inactif.

Séparateur actif et PMC S-Actif

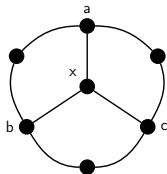
Correspond aux PMC trouvé via le cas n°4 de l'algorithme de BOUCHITTÉ et TODINCA.

Définition

Ω une PMC de G , Δ_Ω l'ensemble des séparateurs de Ω et S un séparateur minimal.

$\Omega' = \Omega$ auquel on ajoute des arêtes entre tout les sommets des séparateur $X \subseteq \Delta_\Omega \setminus S$ de sorte que tout X forme une clique.

Si Ω' n'est pas une clique, alors S est actif. Sinon S est inactif.



Séparateur actif et PMC S-Actif

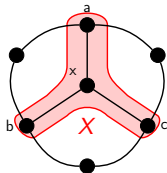
Correspond aux PMC trouvé via le cas n°4 de l'algorithme de BOUCHITTÉ et TODINCA.

Définition

Ω une PMC de G , Δ_Ω l'ensemble des séparateurs de Ω et S un séparateur minimal.

$\Omega' = \Omega$ auquel on ajoute des arêtes entre tout les sommets des séparateur $X \subseteq \Delta_\Omega \setminus S$ de sorte que tout X forme une clique.

Si Ω' n'est pas une clique, alors S est actif. Sinon S est inactif.



Séparateurs $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ actifs

Séparateur actif et PMC S-Actif

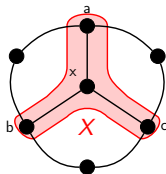
Correspond aux PMC trouvé via le cas n°4 de l'algorithme de BOUCHITTÉ et TODINCA.

Définition

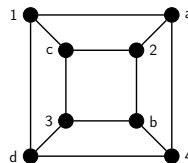
Ω une PMC de G , Δ_Ω l'ensemble des séparateurs de Ω et S un séparateur minimal.

$\Omega' = \Omega$ auquel on ajoute des arêtes entre tout les sommets des séparateur $X \subseteq \Delta_\Omega \setminus S$ de sorte que tout X forme une clique.

Si Ω' n'est pas une clique, alors S est actif. Sinon S est inactif.



Séparateurs $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ actifs



PMC = $\{1, 2, 3, 4\}$

Séparateur actif et PMC S-Actif

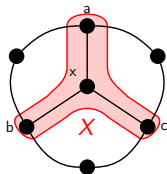
Correspond aux PMC trouvé via le cas n°4 de l'algorithme de BOUCHITTÉ et TODINCA.

Définition

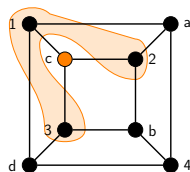
Ω une PMC de G , Δ_Ω l'ensemble des séparateurs de Ω et S un séparateur minimal.

$\Omega' = \Omega$ auquel on ajoute des arêtes entre tout les sommets des séparateur $X \subseteq \Delta_\Omega \setminus S$ de sorte que tout X forme une clique.

Si Ω' n'est pas une clique, alors S est actif. Sinon S est inactif.



Séparateurs $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ actifs



PMC = $\{1, 2, 3, 4\}$

Séparateur actif et PMC S-Actif

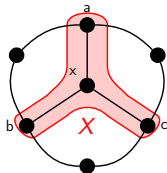
Correspond aux PMC trouvé via le cas n°4 de l'algorithme de BOUCHITTÉ et TODINCA.

Définition

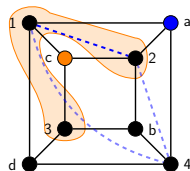
Ω une PMC de G , Δ_Ω l'ensemble des séparateurs de Ω et S un séparateur minimal.

$\Omega' = \Omega$ auquel on ajoute des arêtes entre tout les sommets des séparateur $X \subseteq \Delta_\Omega \setminus S$ de sorte que tout X forme une clique.

Si Ω' n'est pas une clique, alors S est actif. Sinon S est inactif.



Séparateurs $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ actifs



PMC = $\{1, 2, 3, 4\}$

124

Séparateur actif et PMC S-Actif

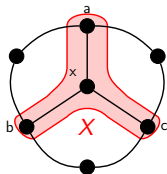
Correspond aux PMC trouvé via le cas n°4 de l'algorithme de BOUCHITTÉ et TODINCA.

Définition

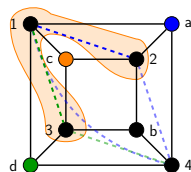
Ω une PMC de G , Δ_Ω l'ensemble des séparateurs de Ω et S un séparateur minimal.

$\Omega' = \Omega$ auquel on ajoute des arêtes entre tout les sommets des séparateur $X \subseteq \Delta_\Omega \setminus S$ de sorte que tout X forme une clique.

Si Ω' n'est pas une clique, alors S est actif. Sinon S est inactif.



Séparateurs $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ actifs



PMC = $\{1, 2, 3, 4\}$

124

134

Séparateur actif et PMC S-Actif

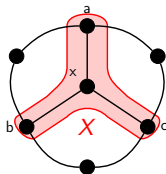
Correspond aux PMC trouvé via le cas n°4 de l'algorithme de BOUCHITTÉ et TODINCA.

Définition

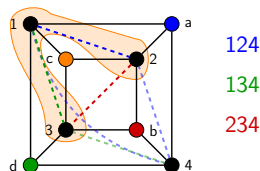
Ω une PMC de G , Δ_Ω l'ensemble des séparateurs de Ω et S un séparateur minimal.

$\Omega' = \Omega$ auquel on ajoute des arêtes entre tout les sommets des séparateur $X \subseteq \Delta_\Omega \setminus S$ de sorte que tout X forme une clique.

Si Ω' n'est pas une clique, alors S est actif. Sinon S est inactif.



Séparateurs $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ actifs



PMC = $\{1, 2, 3, 4\}$

Séparateur actif et PMC S-Actif

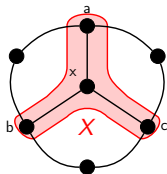
Correspond aux PMC trouvé via le cas n°4 de l'algorithme de BOUCHITTÉ et TODINCA.

Définition

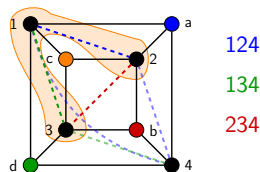
Ω une PMC de G , Δ_Ω l'ensemble des séparateurs de Ω et S un séparateur minimal.

$\Omega' = \Omega$ auquel on ajoute des arêtes entre tout les sommets des séparateur $X \subseteq \Delta_\Omega \setminus S$ de sorte que tout X forme une clique.

Si Ω' n'est pas une clique, alors S est actif. Sinon S est inactif.



Séparateurs $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ actifs



PMC = $\{1, 2, 3, 4\}$
Aucun séparateur actif

Énumération des cliques maximales potentielles

Extension d'un a, b -séparateur minimal

EXTENSION D'UN a, b -SEPARATEUR MINIMAL

Entrée: Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $M \subset V$ de sommets *obligatoires*, un sous-ensemble $F \subset V$ de sommets *interdits* tel que $M \cap F = \emptyset$ et deux sommets a et b de V .

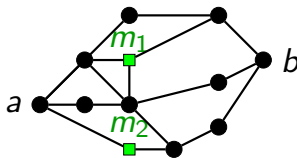
Question: Existe-t-il $X \subseteq V$ un a, b -séparateur minimal avec $M \subseteq X$ et $X \cap F = \emptyset$?

Extension d'un a, b -séparateur minimal

EXTENSION D'UN a, b -SEPARATEUR MINIMAL

Entrée: Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $M \subset V$ de sommets *obligatoires*, un sous-ensemble $F \subset V$ de sommets *interdits* tel que $M \cap F = \emptyset$ et deux sommets a et b de V .

Question: Existe-t-il $X \subseteq V$ un a, b -séparateur minimal avec $M \subseteq X$ et $X \cap F = \emptyset$?

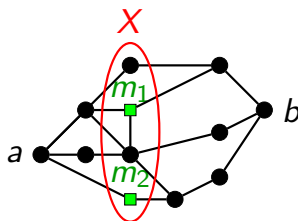


Extension d'un a, b -séparateur minimal

EXTENSION D'UN a, b -SEPARATEUR MINIMAL

Entrée: Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $M \subset V$ de sommets *obligatoires*, un sous-ensemble $F \subset V$ de sommets *interdits* tel que $M \cap F = \emptyset$ et deux sommets a et b de V .

Question: Existe-t-il $X \subseteq V$ un a, b -séparateur minimal avec $M \subseteq X$ et $X \cap F = \emptyset$?

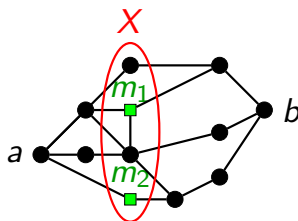


Extension d'un a, b -séparateur minimal

EXTENSION D'UN a, b -SEPARATEUR MINIMAL

Entrée: Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $M \subset V$ de sommets *obligatoires*, un sous-ensemble $F \subset V$ de sommets *interdits* tel que $M \cap F = \emptyset$ et deux sommets a et b de V .

Question: Existe-t-il $X \subseteq V$ un a, b -séparateur minimal avec $M \subseteq X$ et $X \cap F = \emptyset$?



Théorème (SCHIVRE 2025)

EXTENSION D'UN a, b -SEPARATEUR MINIMAL est NP-complet.

Extension d'un a, b -séparateur minimal

Énumération des séparateurs : résultats connus

- TAKATA 2010 :
 - ▶ Énumération des a, b -séparateurs minimaux :
 - ★ Délai polynomial ($O(nm)$).
 - ★ Espace polynomial ($O(n)$).
 - ▶ Énumération des séparateurs minimaux :
 - ★ Incremental polynomial ($O(n^3m)$).
 - ★ Espace ($O(n)$).
- BERGOUGNOUX, M. KANTÉ et WASA WEPA 2019 : Amélioration de l'algorithme de TAKATA pour tout les séparateurs. Utilisation de parallélisation.
 - ▶ Délai polynomial ($O(n^3m)$).
 - ▶ Espace polynomial ($O(n^3 + m)$).

Extension d'un a, b -séparateur minimal

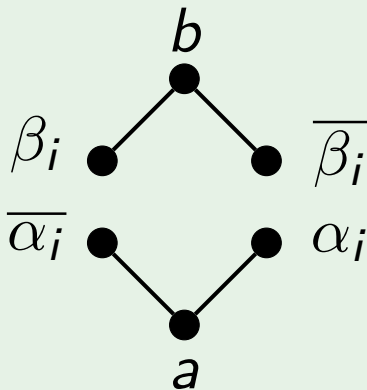
Réduction à 3-SAT : Gadget

b
●

●
 a

Extension d'un a, b -séparateur minimal

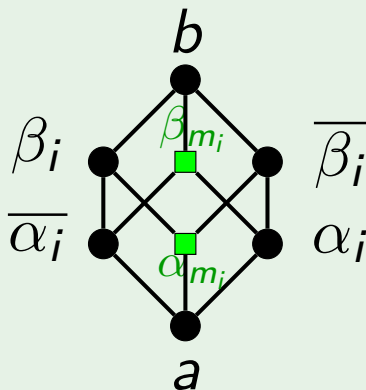
Réduction à 3-SAT : Gadget



Extension d'un a, b -séparateur minimal

Réduction à 3-SAT : Gadget

■ $\in M$

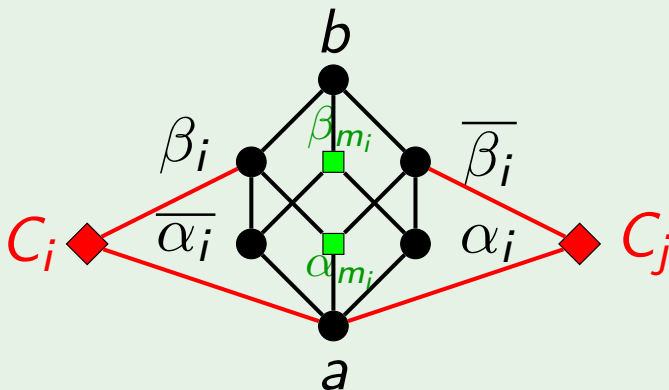


Extension d'un a, b -séparateur minimal

Réduction à 3-SAT : Gadget

■ $\in M$ ◆ $\in M$

$$\Phi = C_i = (? \vee ? \vee \overline{x_i}) \wedge C_j = (x_i \vee ? \vee ?)$$



Extension d'un a, b -séparateur minimal

Réduction à 3-SAT : Graphe de réduction pour

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

b

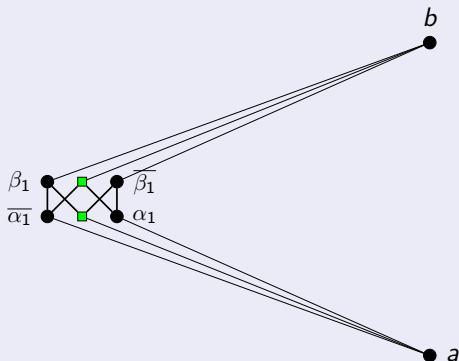


• a

Extension d'un a, b -séparateur minimal

Réduction à 3-SAT : Graphe de réduction pour

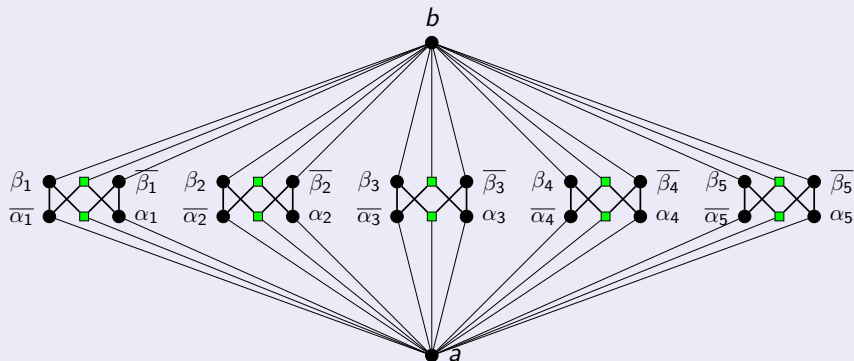
$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$



Extension d'un a, b -séparateur minimal

Réduction à 3-SAT : Graphe de réduction pour

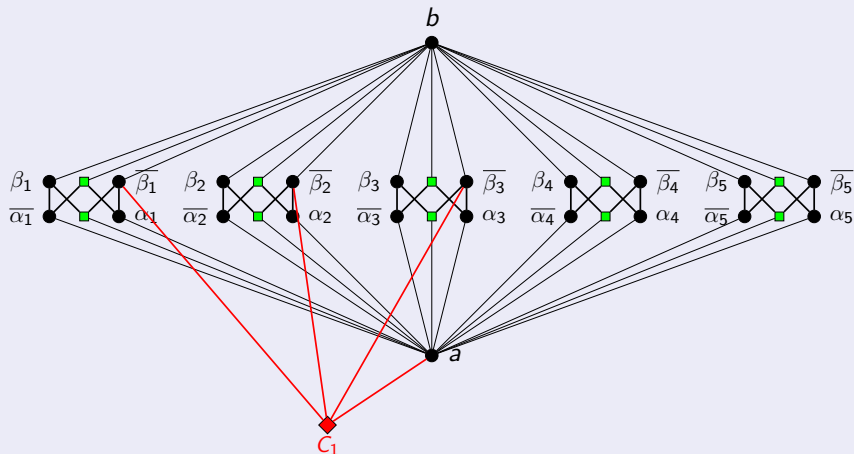
$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$



Extension d'un a, b -séparateur minimal

Réduction à 3-SAT : Graphes de réduction pour

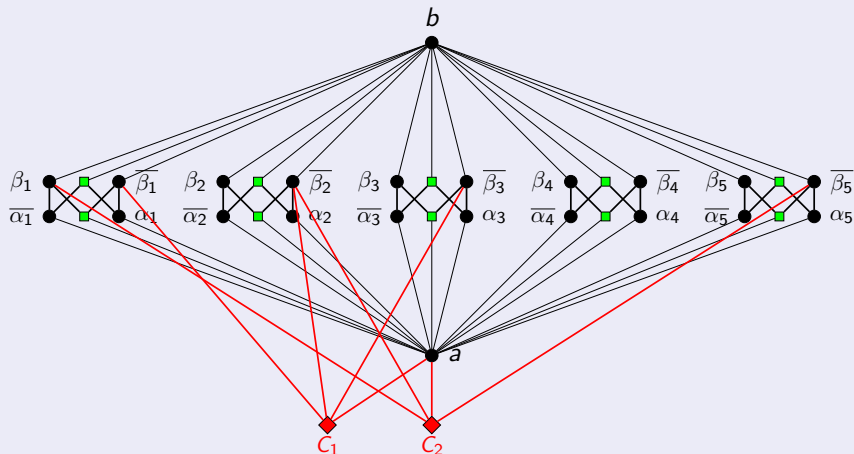
$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$



Extension d'un a, b -séparateur minimal

Réduction à 3-SAT : Graphes de réduction pour

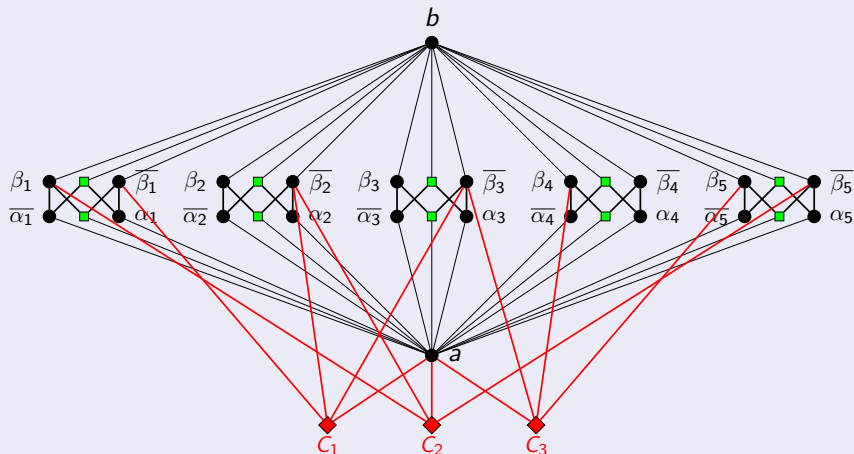
$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$



Extension d'un a, b -séparateur minimal

Réduction à 3-SAT : Graphe de réduction pour

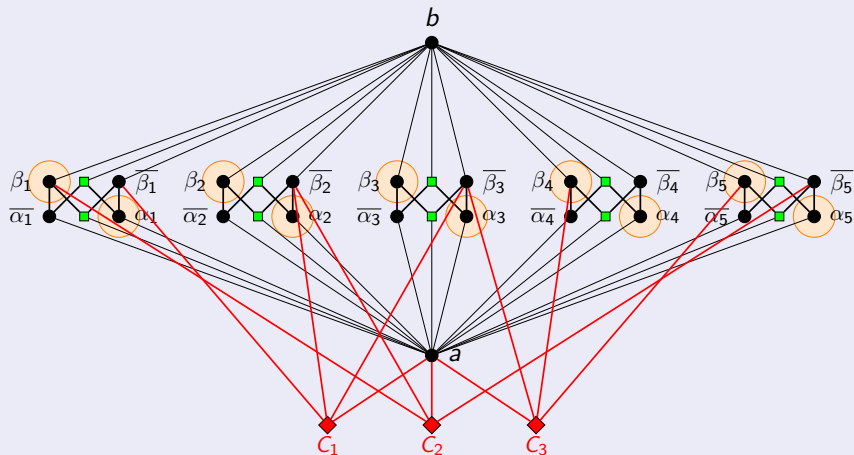
$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$



Extension d'un a, b -séparateur minimal

Réduction à 3-SAT : Graphe de réduction pour

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$



Extension d'une PMC

EXTENSION DE CLIQUE MAXIMAL POTENTIELLE

Entrée: Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $M \subset V$ de sommets *obligatoires*, un sous-ensemble $F \subset V$ de sommets *interdits* tel que $M \cap F = \emptyset$.

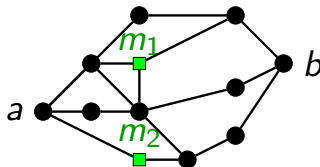
Question: Est-ce que X , une clique maximale potentielle avec $M \subseteq X$ et $X \cap F = \emptyset$ existe ?

Extension d'une PMC

EXTENSION DE CLIQUE MAXIMAL POTENTIELLE

Entrée: Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $M \subset V$ de sommets *obligatoires*, un sous-ensemble $F \subset V$ de sommets *interdits* tel que $M \cap F = \emptyset$.

Question: Est-ce que X , une clique maximale potentielle avec $M \subseteq X$ et $X \cap F = \emptyset$ existe ?

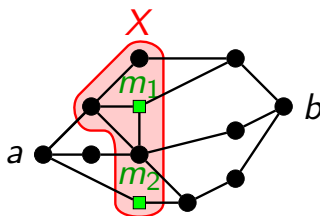


Extension d'une PMC

EXTENSION DE CLIQUE MAXIMAL POTENTIELLE

Entrée: Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $M \subset V$ de sommets *obligatoires*, un sous-ensemble $F \subset V$ de sommets *interdits* tel que $M \cap F = \emptyset$.

Question: Est-ce que X , une clique maximale potentielle avec $M \subseteq X$ et $X \cap F = \emptyset$ existe ?

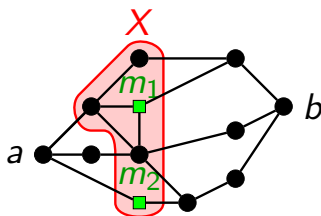


Extension d'une PMC

EXTENSION DE CLIQUE MAXIMAL POTENTIELLE

Entrée: Un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $M \subset V$ de sommets *obligatoires*, un sous-ensemble $F \subset V$ de sommets *interdits* tel que $M \cap F = \emptyset$.

Question: Est-ce que X , une clique maximale potentielle avec $M \subseteq X$ et $X \cap F = \emptyset$ existe ?



Théorème (SCHIVRE 2025)

EXTENSION DE CLIQUE MAXIMALE POTENTIELLE est NP-complet.

Extension d'une PMC S-Actif

EXTENSION DE PMC S-ACTIF

Entrée: Un graphe $G = (V, E)$ et un sous-ensemble $S \subset V$ un séparateur minimal de G .

Question: Est-ce que X , une clique maximale potentielle avec $S \subset X$ et S actif pour X existe ?

Extension d'une PMC S-Actif

EXTENSION DE PMC S-ACTIF

Entrée: Un graphe $G = (V, E)$ et un sous-ensemble $S \subset V$ un séparateur minimal de G .

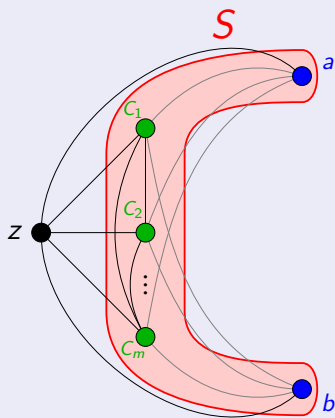
Question: Est-ce que X , une clique maximale potentielle avec $S \subset X$ et S actif pour X existe ?

Théorème (SCHIVRE 2025)

EXTENSION DE PMC S-ACTIVE est NP-complet.

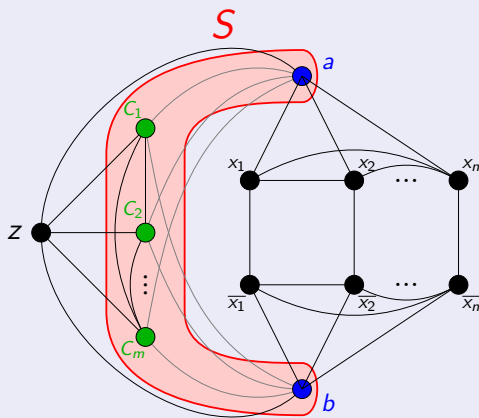
NP-complétude de l'extension d'une PMC S-Actif

Réduction à 3-SAT : Graphe de réduction



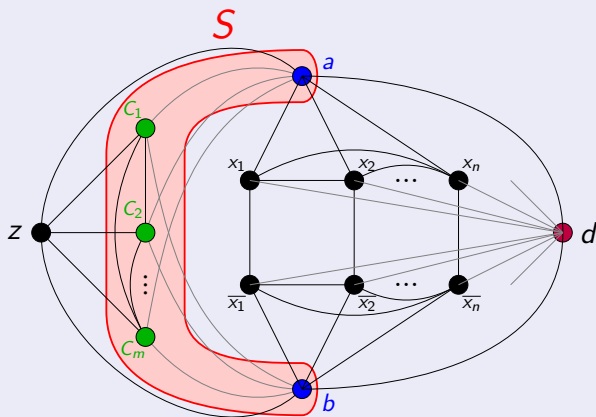
NP-complétude de l'extension d'une PMC S-Actif

Réduction à 3-SAT : Graphe de réduction



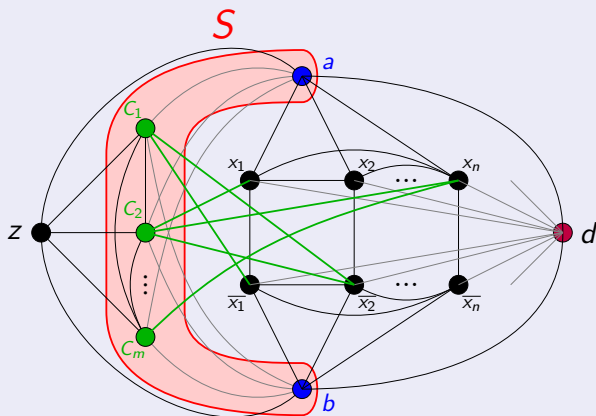
NP-complétude de l'extension d'une PMC S-Actif

Réduction à 3-SAT : Graphe de réduction



NP-complétude de l'extension d'une PMC S-Actif

Réduction à 3-SAT : Graphe de réduction



$$\Phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m \text{ avec}$$

$$C_1 = x_1 \vee x_2, C_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_n}, \dots, C_m = \overline{x_n}$$

Perspectives

Amélioration de l'algorithme de BOUCHITTÉ et TODINCA 2002 ?

L'amélioration du cas n^4 pourrait permettre une complexité output linéaire.

Algorithme avec un délai polynomial ?

- Conception d'un algorithme à délai polynomial en utilisant d'autres méthodes comme Proximity Search.
- Algorithme avec Flashlight Search via une extension similaire à TAKATA.

Résultat d'impossibilité ?

Preuve d'impossibilité de construction d'un algorithme incremental polynomial ou polynomial delay.

Merci pour votre attention !

Proximity Search (CONTE et UNO 2019)

Principe

- Établir une fonction VOISINAGE entre les solutions à énumérer.
- Parcours via Breadth First Search sur le graphe de solutions.

Difficultés

- Le graphe de solution doit être fortement connexe.
- Chaque sommet à un degré polynomial.
- Une mesure de proximité $\tilde{\eta}$ entre les solutions doit exister.
- Pour toute paire de solutions $S, T : \exists S' \in \text{VOISINAGE}(S), |S'\tilde{\eta}T| > |S\tilde{\eta}T|$.