MATHéMAGIE au lycée :
Atelier de Dominique Souder

Il s'agit de proposer des exemples d'activités liant mathématiques et magie, susceptibles de développer l'esprit scientifique d'un lycéen, dans la bonne humeur. Du fait de la longueur du temps nécessaire pour ces activités, et de la faible place laissée à l'arithmétique dans les programmes, l'auteur les a développées essentiellement en club (au lycée Valin de La Rochelle).

1) Variations sur le thème des changements de base de numération.

On se reportera aux articles (denses) de l'auteur, de 5 pages chacun, dans les revues Cosinus de septembre et octobre 2006 (n° 75 et 76). Ont été proposés les 6 tours suivants :

Base deux :
- Les 5 cartes binaires.
- Avec un jeu de 32 cartes.
- Le journal déchiré en 16 morceaux.

Base trois :
- Bleu-blanc-rouge.
- Où vous voulez.
- Les yeux bandés.

Les nouvelles bases sont présentées par le professeur, des conversions sont réalisées par les élèves, qui permettent de constituer pour chacun les « cartes binaires » ou « bleu-blanc-rouge » qui seront le matériel de tours de magie.

Les 4 autres tours, grâce à des manipulations, permettent de montrer que les systèmes de numération permettent de comprendre les incidences des ordres de classements par piles, et sont l'occasion de réinvestir le savoir acquis sur ces systèmes de base deux ou trois.

Pour chaque base, le dernier tour (le plus difficile à décortiquer) peut donner lieu à une réflexion longue et ardue proche de la résolution d'une enquête policière.

2) Permutations et recherche d'invariants.

Faire semblant de battre les cartes mais garder en fait leur ordre initial a toujours été un souci de magicien.

Prenons un jeu de 10 cartes, constitué du 1 au 10 de pique, du haut vers le bas du paquet.

Mettez la carte du dessus du paquet sur la table (le 1). Faites passer la carte suivante (le 2) sous le paquet. Placez la carte qui est maintenant sur le dessus du paquet (le 3) sur la table, au dessus de la première. Faites passer la carte du dessus du paquet (le 4) vers le dessous, et continuez ainsi jusqu'à ce que votre paquet soit épuisé et que les dix cartes soient arrivées en une pile sur la table. Vous venez de réaliser ce qu'on appellera une « battue à l'australienne».

En notant la position des cartes à l'issue de la battue, puis de plusieurs battues successives on obtient le tableau suivant…

Départ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Après battue n°1	4	8	10	6	2	9	7	5	3	1
Après battue n°2	6	5	1	9	8	3	7	2	10	4
Après battue n°3	9	2	4	3	5	10	7	8	1	6
Après battue n°4	3	8	6	10	2	1	7	5	4	9
Après battue n°5	10	5	9	1	8	4	7	2	6	3
Après battue n°6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

On constate dans les colonnes la présence d'un cycle d'ordre 3 : (2,8,5), d'un cycle d'ordre 6 : (1,4,6,9,3,10), et d'un cycle d'ordre 1 : (7). On dit que le 7 est invariant, il ne bouge jamais dans la battue. Un magicien qui connaît la septième carte au départ du jeu peut deviner au bout de n'importe quel nombre de battues la valeur de la septième carte du spectateur.
Le P.P.C.M. de 1, 3, 6 est 6, et il faut 6 battues pour que le jeu revienne à l'état de départ.

Exercices : vérifiez qu'avec 6 cartes il faut 6 battues pour revenir à l'état initial, et qu'avec 12 cartes il en faut 12. Constatez qu'il n'y a pas d'invariant dans ces cas.

Prenons maintenant un jeu de 13 cartes, tous les piques 1, 2, 3, …, V, D, R.
Observons l'évolution des battues.

Départ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	V	D	R
Après battue n°1	10	2	6	D	8	4	R	V	9	7	5	3	1
Après battue n°2	7	2	4	3	V	D	1	5	9	R	8	6	10
Après battue n°3	R	2	D	6	5	3	10	8	9	1	V	4	7
Après battue n°4	1	2	3	4	8	6	7	V	9	10	5	D	R

Il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'au bout (retrouver l'ordre initial), tous les cycles sont déjà apparents :

- deux d'ordre 1 : (2) et (9)
- un d'ordre 3 : (5,8,V)
- deux d'ordre 4 : (R,1,10,7) et (3,6,4,D)

Le P.P.C.M. de 1, 1, 3, 4, 4 est 12. Il faudrait 12 battues pour retrouver l'ordre initial.
En application, l'auteur propose le tour original de magie suivant…

Le tour des 13 spectateurs

Vous êtes le magicien, vous avez placé les piques dans l'ordre suivant que vous avez appris par cœur :

6, 1, 8, R, 4, 2, 10, 7, D, 5, 3, 9, V (du haut vers le bas).

Demandez l'assistance de 13 spectateurs !
Mettez-les en cercle. Attribuez leur un numéro à chacun (vous pouvez distribuer un carton numéroté à chacun).

Faites une démonstration de la battue à l'australienne.

Donnez le paquet de 13 cartes au premier spectateur. Faites-lui faire une « battue ». (Ce sera la deuxième du genre puisque vous avez fait la première). Demandez-lui de regarder la deuxième carte à partir du haut (sans l'enlever ou perturber le paquet). Nommez- la : vous avez deviné (la deuxième dans l'enchaînement est l'as de pique). Demandez au deuxième spectateur de regarder la neuvième carte : vous la nommez (dans votre série fétiche, c'est le 5 de pique).

Demandez au troisième spectateur de faire une nouvelle battue (ce sera la troisième depuis le début, en comptant la vôtre). Dites-lui que cette battue serait encore plus rassurante sur l'honnêteté du tour. Après celle-ci faites-lui choisir la cinquième carte : nommez-la (c'est le 4 de pique qui est revenu en position initiale au bout de trois battues). Faites passer le paquet au quatrième spectateur, qui doit choisir la huitième (le 7 de pique), puis au cinquième spectateur qui choisit la onzième (le 3 de pique).

Demandez au sixième spectateur de faire une dernière battue (ce sera la quatrième). Faites-lui choisir la première carte (c'est le 6 de pique qui est revenu en position initiale au bout de quatre battues).

Demandez au septième spectateur ce choisir la troisième carte (le 8 de pique), au huitième de choisir la quatrième (le roi), au neuvième de choisir la sixième (le 2), au dixième de choisir la septième (le 10), au onzième de choisir la dixième (le 5), au douzième de choisir la douzième (le 9) et au treizième et dernier de choisir la treizième (le valet).

Ce tour devrait être apprécié à sa juste valeur ! Présenté ainsi il correspond à la logique de son étude mais vous pouvez sans doute améliorer sa présentation. Vous pouvez par exemple choisir toujours le même spectateur pour faire les battues, et appeler le spectateur numéro 2 d'abord à choisir la carte située dans la position correspondant à son numéro, puis le spectateur numéro 9 à choisir la $9^{è}$, ceci au bout d'une ou deux battues. Au bout de trois battues vous pouvez demander aux spectateurs numéro 5, 8 et 11 de choisir la $5^{è}$, la $8^{è}$ la $11^{è}$ carte. Au bout de quatre battues vous pouvez demander aux spectateurs qui n'ont pas encore joué de se faire connaître : le premier regardera la première carte, le $3^{è}$ regardera la $3^{è}$, etc. : vous n'aurez pas à vous rappeler quels numéros et spectateurs n'ont pas encore été sollicités.

Ce tour qui met en scène 13 spectateurs avec le magicien peut contribuer à justifier votre opinion que les mathématiques peuvent être, aussi, un talent de société…

3°) Congruences.

Il n'est pas nécessaire de faire avec les élèves de théorie préalable aux activités suivantes, les congruences modulo 7 seront assimilées progressivement lors de l'élaboration d'un calendrier perpétuel, les congruences modulo 9 par le tour sur le billet en euros, et l'addition modulo 17 par le tour appelé « l'élu de son cœur ».

a) La machine à remonter le temps.

Quel est le jour de la semaine correspondant à une date donnée ? La réponse nous est fournie par un «calendrier perpétuel». Nous vous proposons de construire intellectuellement le vôtre !

Premier janvier 1900 : nous sommes un lundi.

Les autres lundis du mois de Janvier se succèdent tous les 7 jours : les 8, 15, 22, 29 Janvier.

Voilà le mois de Février; le premier lundi sera le 4, et les suivants les 11, 18, 25. On constate un décalage de 3 avec les résultats de Janvier.

Continuons avec Mars : rappelez-vous ! Ce mois de Février 1 900 est celui d'une année non bissextile (*) et donc un mois de 28 jours : on obtient comme en Février les dates de 4, 11, 18, 25 pour les lundis de Mars et donc le même décalage de 3 jours par rapport aux dates de Janvier. Comme Mars a 31 jours et que 31 = 28 + 3, on va constater un nouveau décalage de 3 entre Avril et Mars, donc de 3 + 3 = 6 entre Janvier et Avril.

De même, Avril ayant 30 jours, il y aura un décalage d'Avril à Mai de 30 - 28 = 2, d'où un décalage entre Janvier et Mai de 6 + 2 = 8, ce qui revient à 1 car 8 = 7 + 1 (en effet un décalage de 7 jours redonne les mêmes jours de la semaine puisque celle-ci a justement 7 jours).

En poursuivant ainsi pour tous les mois, on peut attribuer à chacun un nombre qui lui permet de se ramener à ce qui se passerait si, au lieu d'être ce mois là, on était en Janvier. D'où, avec au départ un décalage de 0 pour Janvier (évidemment puisque Janvier n'est pas décalé par rapport à Janvier) la liste des décalages pour chaque mois de l'année :

0, 3, 3, 6, 1, 4, 6, 2, 5, 0, 3, 5

A partir de là, on peut reconnaître n'importe quel jour de la semaine de 1900 : par exemple si on parle du 15 Mai, on sait que c'est le même jour de la semaine que le 15 + 1 Janvier puisque le décalage pour Mai est 1. Comme le 15 Janvier était un Lundi, le 16 est un Mardi et le 15 Mai aussi.

1901 et les autres …

Imaginons-nous maintenant l'année suivante, en 1901. Comme 1900 n'était pas bissextile, elle avait 365 jours :

mais 365 = 7 x 52 + 1 (il y a 52 semaines de 7 jours + 1 jour dans une année).

L'année 1901 aura donc un décalage de 1 par rapport à la précédente. Le 1er Janvier ne sera pas un Lundi mais un Mardi.

Imaginons qu'on attribue un chiffre de 1 à 7 à chaque jour de la semaine, de la façon suivante : 1 pour le Lundi, 2 pour le Mardi, ..., 6 pour le Samedi, 7 donc 0 pour le Dimanche. Alors, chaque jour de la nouvelle année peut être identifié en ajoutant 1 à ce qu'on aurait pour l'année 1900. Par exemple pour le 15 Mai de cette nouvelle année, on fait 15 + 1 (dû au mois) + 1 (dû à l'année) = 17 et le 17 Janvier de l'année 1900 de référence est un Mercredi, donc le jour en question aussi.

Ce qu'on peut retrouver en remarquant que 17 = 2 x 7 + 3 et que le 3 correspond au Mercredi.

Pour 1902, il faudrait ajouter 2 par rapport à 1900, et pour 1903 ajouter 3.

Ces années s'écoulent jusqu'à ce qu'on rencontre une année bissextile, 1904, qui a 29 jours en Février et donne donc un décalage supplémentaire de 1 pour les mois suivants. On ajoutera donc à ce qu'on avait appris à faire jusqu'ici 1 par année bissextile écoulée depuis 1900 et aussi pour l'année en cours si elle est bissextile et si l'on a dépassé le 28 Février.

Par exemple, pour établir le jour du 22 Août 1950, on additionne :

12 pour les années bissextiles : en effet, 50 = 4x12 +2 : (on a donc vu 12 années bissextiles s'écouler depuis 1900)

2 pour le mois d'août (voir année 1900)

22 pour le jour [on dit le "quantième" du mois (le 22 août)]

50 pour l'année au-delà de 1900.

Le total, 86, revient, en enlevant le plus possible de fois 7, à 2 (car 86= 7x12 + 2). C'est donc un Mardi.

(*) les années bissextiles ont 29 jours en Février: Elles se succèdent tous les 4 ans et sont reconnaissables à ce qu'elles se divisent par 4, ce qui peut se simplifier en la possibilité de diviser par 4 le nombre formé des deux derniers chiffres de droite. Il y a une exception pour les années se finissant par 00 : le nombre formé par la partie à gauche des 00 doit se diviser par 4. Ainsi 1900, 1800, 1700 ne sont pas bissextiles car 19, 18, 17 ne se divisent pas par 4. Par contre 1 600 est bissextile et 2000 aussi car 16 et 20 sont divisibles par 4.

Que se passe-t-il maintenant qu’on a atteint et dépassé l’an 2000 ?

Au 27 février 2000, il s’est écoulé depuis 1900, 100 ans (ce qui donne le chiffre 2, car 100 = 7 x 14+2), et 24 années bissextiles [partie entière de (99 : 4) ce qui donne le chiffre 3]. La correction est donc de 2 + 3 = 5 (soit – 2) par rapport à ce qui se passait au 27 février 1900. A partir du 28 février 2000, on compte une année bissextile de plus, et la correction est donc de 6 (soit – 1) .

Si on veut se référer à 2000 maintenant dans nos calculs au lieu de 1900, au point de vue années et années bissextiles écoulées, on peut donc enlever 1 à ce qu’on obtient par rapport à la tactique expliquée pour les années 1900 (sauf pour les natifs entre le 1er janvier et le 28 février 2000, alors enlever 2).

Exemple pour le 15 janvier 2001 : 15 + 0 (janvier) +1 (an 2001) + 0 (année bissextile depuis 2000) – 1 = 15 donc 1 : c’est un lundi.

Si vous vous pensez que ce genre de récréation (savoir quel jour de la semaine on est né) est assez futile, sachez qu'il y des applications inattendues très sérieuses ! Une avocate spécialiste des conflits en Prud'hommes, a été très heureuse de connaître ce truc : en effet les affaires se jugent hélas très longtemps après les événements conflictuels, et d'une part il est important de savoir quel jour de la semaine cela se passait (places des jours de congé, RTT, etc.) et d'autre part il est difficile de retrouver des calendriers des années passées. Qui a dit « les maths, à quoi ça sert ? »

b) Le billet en euros.

Le billet comporte un numéro composé d'une lettre et de onze chiffres.

La lettre X est la 24 ème de l'alphabet. On remplace X par 24 à gauche des onze chiffres et on obtient : **24 22441438235**.

On cherche le reste de la division par 9 de ce nombre. C'est le même que celui de la division par 9 de la somme de ses chiffres.

La somme des chiffres est 44, et comme 44 = 9x4 +8, **le reste est 8**.

Les billets sont conçus par la Banque de France pour que le reste de la division de leur numéro (obtenu en remplaçant la lettre par le numéro de sa place dans l'alphabet) par 9 soit toujours 8.

Si le magicien demande à connaître la lettre et tous les chiffres suivants sauf le dernier à droite, il lit **24 2244143823.**

L'addition des chiffres donne 39.

Elle doit donner 8 de plus qu'un multiple de 9.

On pense à 36, plus 8 égale 44. De 39 à 44 il manque 5.

Le dernier chiffre est donc 5, c'est celui caché par le spectateur.

Cas particulier : si la somme conduit déjà à un reste égal à 8, le dernier chiffre pourrait aussi bien être 0 que 9. Mais la banque de France a décidé qu'un numéro ne se terminerait jamais par 0. Donc on conclut dans ce cas que le chiffre caché de droite est un 9.

Sans entrer dans la théorie l'élève a utilisé une congruence modulo 9 et s'est familiarisé avec, en faisant ce tour de magie.

c) L'élu de son cœur

C'est le printemps, et ça gazouille dans la classe de troisième : qui sera le chéri de telle superbe demoiselle ? Le jeune magicien se vante de connaître un peu les cœurs, même quand ceux-ci tardent à se déclarer. En fait, lui aussi est un peu timide, mais à l'occasion d'un tour de magie, il y a peut-être un message à faire passer… Profitant d'un rassemblement de copains il propose à celle pour laquelle il soupire de lui révéler, même si elle même ne le sait pas encore, vers lequel des dix-sept garçons de la classe elle a un penchant…

Le magicien a préparé 17 cartons ou papiers de la taille des cartes à jouer, numérotées de 1 à 17. Il propose d'écrire sur chaque carton le nom d'un des garçons de la classe, et montre l'exemple en écrivant le sien sur le carton numéro 1. Ensuite il passe le crayon aux autres.

Les cartons sont rassemblés dans l'ordre croissant, faces cachées, le 1 en haut du paquet, le 17 en dessous.

Le magicien demande à sa Dulcinée de distribuer de gauche à droite les cartes, une à une, alternativement, en deux piles. Celle-ci pose au choix l'une des piles sur l'autre, et coupe. Le magicien distribue alors les 17 cartons en cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, faces cachées. Il place au milieu du cercle un papier blanc sur lequel rien n'est écrit des deux côtés, comme tout le monde peut le vérifier.

Il demande à son amie de choisir une carte, de la retourner en la laissant à sa place.

On regarde le numéro. On compte ce nombre de cartes, en comptant 1 sur la carte retournée à l'instant, mais maintenant dans le sens des aiguilles d'une montre, et on retourne la carte sur laquelle on arrive. On regarde son numéro, on compte ce nombre de cartes en comptant 1 sur elle au départ, et on continue ainsi de carte en carte, jusqu'à ce que toutes les cartes soient retournées sauf une. (On compte sur toutes les cartes, même retournées)

Le magicien fera remarquer que ce n'est que la dernière carte qui donne le secret de ce que l'on a dans son cœur. Il pourra aussi faire remarquer qu'il est assez extraordinaire tout au long du tour de ne pas retomber sur une carte déjà retournée…

Le dernier carton est retourné : c'est le numéro 1, celui où est écrit le nom du magicien. Ce n'est pas fini ! Le magicien demande un briquet, prend le papier blanc, le tient au dessus de la flamme (attention de ne pas tout faire brûler) : des mots apparaissent sur le papier : « le 1 est unique, l'amour est magique ».

Si après cela la demoiselle n'est pas convaincue de votre excellence, et du choix qu'elle a à faire, c'est à désespérer…

Réglons tout de suite une question : sur le papier blanc, vous avez écrit au préalable le texte magique avec un stylo effaceur, ça marche très bien, ça ne se voit pas, et ça remplace le jus de citron, l'encre sympathique du passé.

Ce tour fonctionne pour 17 mais aussi 5, 7, 19, 29, 31… cartons (certains nombres premiers). Le principe de base est que, quel que soit le point de départ sur le cercle, sauf le 1, le circuit des cartes laissera le 1 à l'écart : toutes les cartes seront retournées avant lui. Si votre amie choisit de retourner au départ un carton qui se révèle être le vôtre, le numéro 1, arrêtez tout de suite le tour en enchaînant avec la message secret sur le papier.

Le mélange des cartons au départ amène les numéros à se succéder sur le cercle, dans le sens des aiguilles d'une montre, selon un ordre croissant des nombres impairs de 2 en 2, puis des nombres pairs de 2 en 2. Attention à bien prendre dans des sens différents la distribution des 17 cartes au début et le comptage vers les cartes retournées ensuite.

Questions :

- quand on passe d'une position sur le cercle vers une autre, à quelle opération entre les nombres concernés cela correspond-il ? (en ramenant tout à des nombres entre 1 et 17, ce qui se dit travailler modulo 17)

- qu'arrive-t-il aux dix-sept nombres de 1 à 17 par cette opération ?

- qu'arrive-t-il à un nombre quand on le transforme successivement seize fois ?

Réponses :

Quelles que soient les coupes, les 17 nombres se succèdent sur le cercle dans l'ordre suivant, dans le sens des aiguilles d'une montre :

1-3-5-7-9-11-13-15-17-2-4-6-8-10-12.

Bien sûr on ne sait pas où est le 1 face cachée dans le cycle, mais c'est toujours ce cycle. Les valeurs se succèdent de 2 en 2 modulo 17 (y compris au moment 17+2 = 19 qui se ramène à 2)

Le comptage du nombre de cartons démarre sur le carton retourné de valeur « n », donc le nombre d'intervalles de 2 pour arriver à la nouvelle position est seulement (n-1).

La nouvelle valeur retournée est donc n + 2(n-1) = 3n – 2 (bien sûr modulo 17).

Voyons les transformations des 17 nombres possibles :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3n-2	1	4	7	10	13	16	2	5	8	11	14	17	3	6	9	12	15

Dans la deuxième ligne on trouve chaque nombre de 1 à 17 une seule fois, et le 1 provient du 1 de la première ligne seulement.

Observons comment s'enchaînent des transformations de nombres…

Partons d'un nombre, par exemple 2, on obtient :

2-4-10-11-14-6-16-12-17-15-9-8-5-13-3-7- de nouveau 2.

On obtient un cycle des seize valeurs différentes allant de 2 à 17, sans jamais passer par la valeur 1.

Si nous partons d'un autre nombre, on obtient le même cycle décalé des seize valeurs différentes de 1. Le carton qui reste le dernier est toujours le 1.

4°) <u>Probabilités bien improbables.</u>

Une chance sur dix-sept.

Un magicien ne saurait parier sur un bon pourcentage de chances de réussite pour présenter un tour, aussi n'est-ce pas un tour basé sur les probabilités que l'auteur nous propose, mais un tour qui en parle…

« Dans votre auditoire habituel, il y a peut-être des « matheux » qui n'aiment pas s'en laisser compter lorsque vous leur faites des tours de cartes. Voilà une façon de les mettre un peu plus facilement de votre côté.

Demandez-leur, avec un paquet de 52 cartes, combien il y a de chances, quand on tire deux cartes simultanément, que celles-ci soient de même valeur (par exemple : roi de pique, roi de trèfle, ou encore dame de carreau, dame de pique). S'ils trouvent seuls, ils seront de bonne humeur pour le tour qui suivra, et sinon expliquez qu'il a 13 valeurs de 1 jusqu'au roi, et qu'on peut marier à chaque fois de 6 façons différentes deux cartes de même valeur : cœur-carreau, cœur-pique, cœur-trèfle, carreau-pique, carreau-trèfle, pique-trèfle.

Ainsi on peut avoir 13 x 6 = 78 paires de cartes de même valeur.

Combien y a-t-il de paires de cartes dans un jeu de 52 cartes ?

Il y a 52 choix possibles pour la première carte, 51 choix pour la deuxième, mais on peut ainsi trouver deux fois la même paire selon l'ordre dans lequel on a choisi les deux cartes, d'où un nombre de choix de 52 x 51 : 2 = 1326.

Finalement on a 78 chances sur 1326 de tirer deux cartes de même valeur, soit une chance sur dix-sept, ce qui est peu… Insistez là-dessus. Dites que pourtant, dans le tour que vous allez faire, le spectateur et vous allez tirer chacun une carte de même valeur, grâce à vos talents intuitifs…

Pour démarrer ce tour, il faut au préalable que vous ayez mis sur le dessus du paquet deux cartes de même valeur, ceci en cachette.

Dites au spectateur de couper le jeu, de prendre la moitié inférieure. Vous prenez le paquet sur lequel se trouvent les deux cartes de même valeur.

Mettez-vous face à face autour d'une table avec votre ami, chacun ayant les cartes sous la table, faces cachées sur le haut. Dites à votre ami d'attraper une carte où il veut dans son paquet, et de vous la faire passer sous la table. Quand vous la tenez, mettez-la sous votre paquet. Prenez à la place votre carte supérieure et dites :

- vous avez regardé ce que c'était ?

Le spectateur va réagir vite et dire non. Ajoutez bien vite :

- j'ai oublié de vous le dire, c'est ma faute, reprenez-la et regardez-la. Ensuite, repassez-la moi sous la table, en la retournant face visible en haut.

Mettez cette carte quelque part au milieu de votre paquet, et dites :

- c'est à moi de vous faire passer une carte face en haut. Placez-la où vous voulez dans votre paquet, toujours sous la table.

Et bien sûr vous lui faites passer votre carte du dessus, qui fait la paire avec la précédente…

Maintenant chacun pose son paquet sur la table, et l'étale… On constate qu'une seule carte est face en haut dans chaque paquet, et que les deux cartes visibles ont la même valeur !

Ceci malgré la faible probabilité : 1 chance sur 17…(tout l'émerveillement reposant sur le « 1 sur 17 », insistez pendant votre baratin sur cette petite chance).

Le temps de l'atelier est trop court, et le sujet est inépuisable, aussi l'auteur vous propose d'échanger avec lui si vous le souhaitez :

dominique.souder@wanadoo.fr