Atelier P1-13 : par Dominique SOUDER ; dimanche 19 octobre 2014.

« Créons un espace math & magique gravitant autour de nos lieux d'exercice et de vie »

Les tours de magie basés sur les mathématiques et la logique, reproductibles par tous, peuvent faire la joie des plus jeunes comme des retraités. Une « bible » de tous les thèmes mathématiques abordables, selon le niveau d'étude et les capacités de réflexion, sera proposée, ainsi que les références à consulter. On illustrera, à votre demande, en privilégiant des tours absents des précédents ateliers de mathémagie. On présentera aussi les diverses façons (fêtes de rue, salons, ateliers, conférences, spectacles, fichiers circulant sur Internet, activités périscolaires) de valoriser ce sport complet et convivial, que ce soit dans votre établissement, dans votre commune, ou dans votre région.

* * * * * * *

AVERTISSEMENT de l'animateur

Après 6 livres de tours de magie s'expliquant grâce aux mathématiques et à la logique, (et non par des procédés de prestidigitateur) j'ai voulu identifier et rassembler dans un nouvel ouvrage **la quasi-totalité des notions mathématiques de collège et lycée qui se prêtent à une présentation ludique sous forme de tours de mathémagie**.

Néanmoins j'ai souhaité son contenu le plus possible nouveau, aussi quand il y a des reprises de thèmes leur présentation a été revue ou prolongée.

Concrètement, SOS Education a bien voulu m'éditer, mais sous forme de deux ouvrages séparés, l'un portant sur le niveau collège, qui vient de sortir, et l'autre sur la partie lycée qui doit suivre, début 2015.

Cependant pour être agréable aux professeurs de maths, aux spécialistes, et pour le compléter, on trouvera à la fin de cet article une bibliographie et une liste référencée de thèmes mathématiques illustrés par des tours particulièrement remarquables de mes autres ouvrages.

Mon classement par thème est forcément discutable car beaucoup de tours relèvent de plusieurs thèmes imbriqués. Ainsi on pourrait pu regrouper beaucoup de tours sous des thèmes importants, souvent sous-jacents, comme le calcul réfléchi et le calcul mental astucieux, ou la recherche d'invariants numériques. De même, en privilégiant l'intérêt d'une méthode d'explication des tours on pourrait mettre en valeur un classement sur le thème « les bienfaits du calcul littéral ».

Pourquoi ai-je passé autant d'années à réfléchir, décortiquer, modifier, inventer et regrouper des tours relevant des mathématiques avec un parfum de mystère ? Parce que cela me faisait plaisir et que j'y trouvais mon compte dans mon travail de prof de maths et mes relations avec mes élèves. Je souhaite développer ci-dessous quelques remarques générales sur **les bienfaits**, à mes yeux, **de la mathémagie**…

Certains tours de magie à explication mathématique peuvent faire rêver et motiver des élèves de tout niveau scolaire à s'investir davantage en maths. L'émerveillement engendre l'envie de comprendre. Ces tours peuvent être reproduits par tous et ainsi permettre aux jeunes de prendre confiance en eux. Certains leur permettent même de passer pour des calculateurs prodiges alors qu'ils ne sont souvent que bien organisés pour réussir des calculs très prémédités ; d’autres tours peuvent aussi donner de bonnes images mentales de notions mathématiques qui seront abordées à de plus hauts niveaux d’étude.

Pour les plus jeunes, avant d’élaborer et de structurer un enseignement du calcul mental, du calcul littéral, et de formaliser, il me paraît important de faire jouer avec les nombres de façon conviviale, de les faire aimer et manipuler, sans avoir peur de les utiliser pour développer la curiosité, la réflexion, le goût de la recherche et l’imagination. Les tours de magie mathématique me semblent être un sport complet associant la réflexion intellectuelle, une démarche scientifique, le sens de l’organisation, et aussi des qualités littéraires et de communication qu’ils développent chez celui qui les pratique. De plus ils peuvent s’exercer de façon conviviale avec un public mêlé de générations et d’âges variés.

Les maths sont souvent vécues comme répulsives par certains et attaquées dans les médias. Je les défends à ma manière. Pour moi les mathématiques peuvent être, aussi, un talent de société, et un domaine de développement de la créativité. Partout où je suis passé j’ai trouvé des élèves capables d’imagination, et après un travail avec moi en club, je suis fier d’avoir fait rédiger puis publier les idées mathémagiques de nombreux de mes élèves collégiens et lycéens, et ainsi de leur avoir fait toucher des droits d’auteurs pendant leur scolarité, ce qui n’est pas banal ! La mathémagie me paraît être une activité périscolaire idéale, très facile à pratiquer et sans matériel particulier ni investissement financier.

« Heureux celui qui a pu pénétrer les causes secrètes des choses »
(Virgile)

Partie A : Mystères maths & magiques pour <u>collégiens</u>

Thèmes divers (par niveau scolaire croissant, puis difficulté croissante)
Divisibilité par 9
Codage ISBN
Le mystère des escargots du Muséum (codage visuel dans la nature)
Comptage et invariant
Calendrier et prévisions
Répétitions de chiffres et calculs astucieux
Multipliez les signes pour gagner un pari
Disparition et conservation d'une longueur
Coordonnées du plan et tours de cartes
L'heure des tours de cartes (cycle, invariant)
Cycle miroir et invariants
Symétrie et jeux de cartes en miroir
Puissances de dix et magie
Chiffres arabes pour carré gréco-latin
Triplet pythagoricien
Disparition et conservation d'une aire
Identités remarquables et tour de magie
Le tour des anneaux de Borromée (topologie, théorie des nœuds)
Pions bicolores et équation linéaire à 2 inconnues.
Miracles successifs pour carré magique.

Thème : « la parité » :
Pour des figues
Repérage par paire
Observez vos dés (géométrie dans l'espace)
Tours utilisant un damier et la parité
En plein air : les jumelles tiennent la corde.

Thème : « les bienfaits du calcul littéral »
(développements, factorisations, équations, la numération décimale et son écriture)
Le tour des chaussures
Le hasard de la donne
On n'est pas sérieux quand on a 17 ans
Avec des dominos
Un peu de poésie dans les calculs.

Partie B : Mystères math & magiques <u>pour lycéens</u>…

Un même principe magique à travers différentes classes successives de l'enseignement :
Motivons nos enfants pour faire des maths grâce à la magie, ceci à tout âge !

Thèmes divers pour le lycée
Les tarots de Marseille (combinatoire, organisation logique, formule d'élimination)
Petites différences d'angles et grands effets
Coordonnées dans l'espace et tours de cartes
Carré magique anniversaire
Quart de tour dans l'espace, périodicité et invariant
Triangle de Pascal
Probabilités et certitude de gagner…
Suites de Fibonacci et racine numérique d'un nombre
Quand deux magiciens se mettent en (base) quatre

Thème « Arithmétique des congruences »
Congruences et tours de cartes (chapelet)
Le petit cachottier (tous en cycle sauf un)
Le théorème chinois (jouons avec les restes de divisions)

Thème « Permutations » :
Invariant et in/out shuffle
Monge et invariants
Système binaire et déplacements dans un jeu ayant un nombre de cartes égal à une puissance de 2.

Bonus :

- **la trinité mathémagique** (Sudoku, invariant, taquin)
- **comment fêter les anniversaires de façon magique** (suites arithmétiques, curiosités numériques)
- **racines carrée et cubique sans calculatrice (**à la main, ou tel un géomètre, ou un mathémagicien)

Bibliographie :

- « Martin Gardner présente » tomes 1 et 2, éditions Fantaisium, 2011

- « Quelques mélanges parfaits de cartes » par Aimé Lachal,
  lachal.neamar.fr/Ressources/Shuffle.pdf

- « Magie et maths » par Dominique Souder, ACL éditions du Kangourou ; 64 pages ; (paru en 2001) **(1)**

- « 32 tours mathématiques pour 32 cartes », par Dominique Souder, ACL éditions du Kangourou ; 64 pages ; (paru en avril 2008) **(2)**

- « 80 petites expériences de maths magiques » par D. Souder, éd. Dunod, 232 pages, (paru en mai 2008, nominé Prix Tangente 2009) ;
  traduction en chinois langage simplifié parue en 2010,
  traduction en turc parue en 2013 **(3)**

- « Magic Matthieu compte en moins de 2 », par Dominique et Pascalyves SOUDER, éd. Belin ; 130 pages ; (mai 2010) ;
  traduction en coréen parue en 2011. **(4)**

- « Magic Matthieu multiplie les nouveaux mystères »
  par Dominique et Pascalyves SOUDER, éd. Belin ; 130 pages ;
  (paru en mai 2008, nominé Prix Tangente 2012) **(5)**

- « 60 tours magiques de mathématiques et de logique », éd. Ellipses ;
  D. Souder ; 216 pages ; (paru en mai 2008,
  nominé Prix Tangente 2013) **(6)**

Voici parmi les 6 livres référencés ci-dessus de D. Souder

une sélection de tours particulièrement remarquables

qui complète les tours des livres édités par SOS Education,
ou développe tel thème mathémagique,:

- Calculs astucieux : « le total prédit » page 17 (1) ; « un tour digne d'un calculateur prodige » page 20 (3) ; « les roues magiques » pages 40 à 52 (4) ; « 1ère et 2e déductions » page 77 (6)
- calcul littéral et écriture décimale : « le jeu de l'anneau » pages 53 à 54 (6)
- Carrés magiques : pages 54 à 60, (2)
- Codage : « 5 questions pour 32 cartes » pages 61 à 63 (2) ; « les cartes magiques de Mathieu» pages 102 à 106 (4) ; « association d'images » pages 107 à 110 (6).
- Coordonnées : « 5 sur 5 » et « les mains de 5 » pages 10 à 15 (2)
- Congruences : « le billet en euros », page 182 et « l'élu de son cœur » page 184 (5)
- Divisibilité par 9 : « la magie du 9 » page 24 (1) ; « racine numérique d'un nombre » pages 84 à 90 (3) : « le lecteur de pensée virtuel » page 119 (5) ;
- Divisibilité euclidienne : « le numéro INSEE » page 9, (1) ;
- Invariant : « on complète » page 10 (1) ; « les couleurs de la magie », page 19 et « les bâtons numériques » pages 24 à 32 (6)
- Nombres relatifs : « une réflexion bien pesée » pages 54 à 59 (4)
- Numération en base deux : « les 6 cartes binaires » page 166 et « le journal déchiré en 16 morceaux » page 171 (5) ; « le mathématicien et le magicien », page 7(6)
- Numération en base trois : « bleu, blanc, rouge » pages 60 à 66 (4)
- Parité : « les 4 valets » page 28, (2) et « la clef de la prédiction » page 90 (5) ; « vol de tableau » page 62 (1) ; « pair et impair » page 20 (2)
- Permutations : « la logique du compère » page 46 (2), et « les 13 spectateurs », page 161 (5)
- Puissances de deux : « double détente en Suisse » pages 103 à 106 (6)
- Suites arithmétiques : « le sesquimètre de couturière » page 7 et « ajouter des nombres consécutifs » pages 40 à 51 (3) ; « les triangles magiques » page 124 (5)
- Symétrie : « tours pour jeux arrangés en miroir » (dont le tour « les 5 doigts de la main »)(6)
- Triangle de Pascal : « la grande pyramide » pages 84 à 99 (4).
- Vecteurs et propriétés d'un losange : « l'assiette magique » pages 120 et 121 (3).

Les enseignants qui souhaiteraient glisser d'une initiation mathématique sur un thème donné vers la construction d'un tour de magie et son matériel pourront apprécier entre autres tours :

- les 6 cartes binaires page 166 (5)
- « bleu, blanc, rouge » (numération de base trois) pages 60 à 66 (4)
- « une réflexion bien pesée » (calculs avec des nombres relatifs) pages 54 à 59 (4).

Les enseignants qui souhaiteraient présenter, à partir d'un tour de magie et son matériel, une initiation mathématique sur un thème choisi pourront apprécier entre autres tours :

- « le sesquimètre de couturière » page 7 et « ajouter des nombres consécutifs » pages 40 à 51 (3) sur le thème des suites arithmétiques
- « les bâtons numériques » pages 24 à 32 (6) sur les thèmes de la recherche d'invariant et du calcul astucieux prémédité
- « les 5 cubes » pages 92 à 93 (3) pour la démarche d'enquête scientifique puis l'intérêt du calcul littéral dans les démonstrations.

Un exemple où un seul et même principe magique peut s'illustrer grâce à des notions mathématiques qui apparaissent dans des programmes variant du cours élémentaire jusqu'à la terminale S…

Le principe

Soient a, b, c, A, B, C des nombres et * une opération entre nombres comme l'addition ou la multiplication, mais pas la soustraction ou la division : il faut que cette opération soit commutative (a*b=b*a) et associative (a*(b*c) = a*(b*c) = a*b*c). Dressez la table de Pythagore de votre opération : vous obtenez 9 résultats sur fond blanc. Entourez 3 cases sur les 9, en veillant à ce qu'il n'y en ait qu'une seule entourée par ligne et une seule par colonne. Plusieurs solutions sont possibles…

*	A	B	C
a	a*A	a*B	a*C
b	b*A	b*B	b*C
c	c*A	c*B	c*C

Faites agir votre opération * entre vos trois valeurs. Changez vos 3 cases entourées en respectant toujours la consigne « une par ligne, une par colonne », faites agir votre opération : vous devriez trouver le même résultat que précédemment. Pourquoi ?

Il se trouve que quand vous faites agir * entre vos 3 valeurs entourées, c'est finalement entre les 6 valeurs sur fond rouge, qui ont permis de dresser la table de l'opération * , que vous la faites agir. Ainsi, par exemple :

- à partir des 3 cases (a*A), (b*C) et (c*B) vous obtenez : (a*A)*(b*C)*(c*B) qui peut s'écrire a*b*c*A*B*C grâce aux propriétés de commutativité et d'associativité de votre opération.
- à partir des 3 cases (b*A), (a*C) et (c*B) vous obtenez : (b*A)*(a*C)*(c*B) qui peut s'écrire encore a*b*c*A*B*C grâce aux propriétés de commutativité et d'associativité de votre opération. Etc.

Ce principe peut être utilisé avec diverses opérations possédant les bonnes propriétés, et des tableaux ayant un nombre de cases supérieur : 4x4 (on entoure 4 cases), 5x5 (on entoure 5 cases), …, 10x10 (on entoure 10 cases), etc. A partir du moment où les cases entourées respectent la consigne « une par ligne, une par colonne », le résultat de l'action de l'opération * entre vos cases choisies sera toujours le même : ce sera celui qu'on obtient en faisant agir * entre tous les nombres qui ont servi à dresser la table de votre opération *.

La présentation sous forme de tour de magie

Vous enseignez en primaire, vous voulez rendre les mathématiques joyeuses et les faire entrer dans la vie quotidienne, voici comment faire construire à vos élèves un cadeau d'anniversaire original pour un membre de leur famille (maman ou grand père…). Supposons qu'il s'agisse de fêter le 36^{e} anniversaire d'une personne. Choisissons un tableau de 4x4 = 16 cases qui servira de cadeau mathémagique (voir ci-dessous). Vous placez dans 7 (sur les 8) cases rouges quelques petits nombres. Vous faites leur total. Si vous trouvez 29, vous calculez alors qu'il faut mettre 36-29 = 7 dans la 8^{e} case rouge, afin que le total des 8 cases rouges fasse bien 36. Vous dressez ensuite la table de Pythagore de l'opération « addition », et vous coupez les bords rouges (ligne du haut, et colonne de gauche) : il vous reste le tableau de 16 cases à fond blanc.

+	3	5	6	7
1	4	6	7	8
2	5	7	8	9
4	7	9	10	11
8	11	13	14	15

4	6	7	8
5	7	8	9
7	9	10	11
11	13	14	15

L'enfant apporte le tableau à la personne à laquelle il veut souhaiter bon anniversaire, avec 4 pions, et demande de placer ceux-ci en respectant la consigne « un par ligne, un par colonne ». La personne doit ajouter les 4 valeurs écrites sous les pions, elle trouvera 36. On lui fait trouver une autre solution de positionnement des pions, le total des 4 nombres sera encore 36 : décidemment, bon 36^{e} anniversaire !

Motivons pour un apprentissage

Vous souhaitez faire apprendre à un petit enfant des mots difficiles pour désigner des nombres s'écrivant avec un 1 suivi de beaucoup de zéros : mille, cent mille, un million, un milliard, etc. (que vous appellerez les puissances de 10 plus tard) ? Voici un jeu, où il faudra cette fois-ci multiplier, pour motiver ces jeunes têtes blondes…

Partez d'une table de multiplication de 3x3 = 9 cases comme la suivante :

×	1	10	1 000
1	1	10	1 000
100	100	1 000	100 000
10 000	10 000	100 000	10 000 000

Un	Dix	Mille
Cent	Mille	Cent mille
Dix mille	Cent mille	Dix millions

Avant de couper les bords colorés habituels, et au lieu d'écrire sur les neuf cases blanches les nombres en chiffres, écrivez-les plutôt en lettres… Faites choisir 3 nombres « un seul par ligne, un seul par colonne ». Faites faire la multiplication des trois nombres choisis (en comptant bien les zéros) ! Faites écrire le résultat en chiffres avec le nombre adéquat de zéros (10 000 000 000), demandez comment le résultat se prononce, et faites-le écrire en lettres (dix milliards)… Recommencez avec d'autres positions des trois nombres pour mettre en valeur la surprise de toujours trouver le même produit. Pour présenter encore mieux, préparez avant de faire le tour une reproduction du capitaine Haddock en furie dans « Tintin et le crabe aux pinces d'or », modifiez une bulle de ses jurons en écrivant « dix millions de mille sabords c'est dix milliards de sabords et il y a dix zéros ! », mettez cette image dans une enveloppe que vous laisserez trainer sur votre table : vous la sortirez et la montrerez devant votre petit public à la fin du tour…

Vous serez d'accord, j'espère, sur le fait que voilà une façon ludique et motivante pour les plus jeunes des écoliers de se familiariser avec ces nombres et leurs écritures !

Les puissances de 10 au collège

Vous enseignez en quatrième et vous espérez faire faire à vos élèves quelques calculs d'entraînement sur les puissances de 10 à exposants entiers positifs et négatifs, sans qu'ils rechignent à la tâche, et même en leur faisant relever un défi ?

dix	10^{-2}	10^{2}	10^{5}
un centième	10^{-5}	un dixième	10^{2}
cent	10^{-1}	mille	dix mille
cent mille	100	un million	un milliard

Faites leur trouver le plus de positionnements « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrire et calculer les produits des puissances de 10 associées aux 4 pions… Surprise : tous les produits seront égaux ! Les élèves sauront-ils trouver pourquoi ?

Ci-dessous voici comment le tableau a été construit : c'est une table de multiplication à partir de 8 nombres sur fond rouge dont le produit est : $1 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{4} \times 10 \times 10^{-2} \times 10^{2} \times 10^{5} = 10^{8}$, soit 100 000 000 ou cent millions.

Comme il n'y a qu'un seul pion sur la même ligne on ne peut utiliser deux fois le nombre rouge de cette ligne pour des jetons différents. Comme il n'y a qu'un seul pion sur la même colonne on ne peut utiliser deux fois le nombre rouge de cette colonne pour des jetons différents. Les quatre jetons utilisent donc les huit nombres rouges. Le produit des quatre jetons est égal au produit des huit nombres rouges, c'est pour cela qu'on trouve toujours le même résultat final.

$\times$	**10**	**10^{-2}**	**10^{2}**	**10^{5}**
1	**10**	**10^{-2}**	**10^{2}**	**10^{5}**
10^{-3}	**10^{-2}**	**10^{-5}**	**10^{-1}**	**10^{2}**
10	**10^{2}**	**10^{-1}**	**10^{3}**	**10^{4}**
10^{4}	**10^{5}**	**10^{2}**	**10^{6}**	**10^{9}**

Et au lycée alors ?

Les occasions seront encore plus nombreuses de mettre en œuvre le principe magique qui nous occupe, pour faire passer des notions parfois ingrates, ou pour varier les présentations d'exercices d'entraînement à l'application de certaines propriétés fondamentales...

Les angles modulo 2π au lycée

Trouvez le plus de positionnements possibles « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrivez et calculez les sommes, modulo 2π , des 4 angles choisis.
[Pour plus d'efficacité on pourra remplacer, dans le tableau et les calculs, les mesures de certains angles par celles qui sont équivalentes entre 0 et 2π].
Que remarquez-vous ? Pourquoi ? [Voir les pages « solutions »]

$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	π
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{3}$
$\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{12}$

Additions de logarithmes

Trouvez le plus de positionnements possibles « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrivez et calculez les sommes des 4 nombres choisis.
[On pourra s'aider de l'écriture de toutes les cases sous la forme du Ln d'un rationnel]
Que remarquez-vous ? Pourquoi ? [Voir les pages « solutions »]

Ln(3/4)	Ln(9/2)	Ln3	-Ln2
-Ln3	Ln2	Ln(4/3)	Ln2 – Ln9
-Ln8	Ln(3/4)	Ln(1/2)	-Ln12
Ln2	Ln4 + Ln3	Ln8	Ln(4/3)

Multiplications d'exponentielles

Trouvez le plus de positionnements possibles « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrivez et calculez les produits des 4 nombres choisis.
[On pourra mettre tous les nombres sous la forme e^k avec k rationnel]

$e^{1/2}$	1	$e^{-3/2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
e^{4}	$e^{3,5}$	e^{2}	e^{3}
e^{3}	$e^{2,5}$	e	e^{2}
$\frac{1}{e}$	$e^{-1,5}$	e^{-3}	$\frac{1}{e^2}$

Que remarquez-vous ?

Vérifiez que ce tableau 4x4 peut être celui d'une table de multiplication, en imaginant pour les cases colorées des valeurs adaptées permettant sa construction :

$\times$				
	$e^{1/2}$	1	$e^{-3/2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
	e^{4}	$e^{3,5}$	e^{2}	e^{3}
	e^{3}	$e^{2,5}$	e	e^{2}
	$\frac{1}{e}$	$e^{-1,5}$	e^{-3}	$\frac{1}{e^2}$

[Voir les pages « solutions »]

Additions de nombres complexes

Trouvez le plus de positionnements possibles « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrivez et calculez les sommes des 4 nombres choisis. Que remarquez-vous ? Pourquoi ? Proposez une manière dont on a pu construire ce tableau.

$\frac{i}{1+i}$	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	$\frac{1+3i}{2+i}$	**-1+i**
$\frac{2-i}{1+i}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	$\frac{3-i}{2+i}$	**-1-i**
$\frac{-1}{1+i}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	$\frac{-1+2i}{2+i}$	**-2+i**
$\frac{3}{1+i}$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$	$2-i$	**-i**

[Voir les pages « solutions »]

Multiplications de nombres complexes

Trouvez le plus de positionnements possibles « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrivez et calculez les produits des 4 nombres choisis.
[On pourra mettre toutes les cases sous la forme $\alpha e^{ki\pi}$ avec α réel et k rationnel].
Que remarquez-vous ? Pourquoi ? Proposez une façon dont on a pu construire ce tableau.

$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	$\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	1	$\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$
1+i	1-i	$\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$	2
-i	-1	$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	-1-i
$e^{i\pi}$	i	$\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	-1+i

[Voir les pages « solutions »]

A vous, lecteur, maintenant, de poursuivre cette aventure mathématique : je suis sûr que vous trouverez d'autres idées à la fois utiles et originales pour faire des maths en jouant…

Remerciements :
à Monsieur Fabien Sommier, du lycée André Boulloche, pour ses idées et son travail de compléments pour le niveau lycée, donnés lors d'un de mes stages au Palais de la Découverte à Paris.

SOLUTIONS : **« faire des maths grâce à la magie »**

Les angles modulo 2π

On trouve toujours pour total des 4 cases : $\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π.

Une possibilité de construction de la table d'addition est de prendre les 8 nombres sur fond de couleur, dont le total des mesures modulo 2π est $\frac{2\pi}{3}$.

+ Mod 2π	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	π
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{3}$
$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{12}$

Additions de logarithmes

On trouve toujours pour total des 4 cases : 0.

Une possibilité de construction de la table d'addition est de prendre les 8 nombres sur fond de couleur, dont le total est 0.

+	0	Ln3 + Ln2	2Ln2	Ln2 – Ln3
Ln3 -2Ln2	Ln(3/4)	Ln(9/2)	Ln3	-Ln2
- Ln3	-Ln3	Ln2	Ln(4/3)	Ln2 – Ln9
-3Ln2	-Ln8	Ln(3/4)	Ln(1/2)	-Ln12
Ln2	Ln2	Ln4 + Ln3	Ln8	Ln(4/3)

Multiplications d'exponentielles

On trouve toujours comme produit des 4 cases la valeur e^3.
On peut construire la table de multiplication à partir des nombres des 8 cases de couleur ci-dessous, dont le produit est e^3.

$\times$	e^3	$e^{2,5}$	e	e^2
$e^{-2,5}$	$e^{1/2}$	e^0	$e^{-3/2}$	$e^{-1/2}$
e	e^4	$e^{3,5}$	e^2	e^3
1	e^3	$e^{2,5}$	e	e^2
e^{-4}	e^{-1}	$e^{-1,5}$	e^{-3}	e^{-2}

Additions de nombres complexes

Le total des 4 cases est toujours 1.
On peut construire la table d'addition à partir des nombres des 8 cases de couleur ci-dessous, dont la somme est 1.

+	$\frac{2-i}{1+i}$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$	2	0
$-1+i$	$\frac{i}{1+i}$	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	$\frac{1+3i}{2+i}$	$-1+i$
$-1-i$	$\frac{2-i}{1+i}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	$\frac{3-i}{2+i}$	$-1-i$
$-2+i$	$\frac{-1}{1+i}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	$\frac{-1+2i}{2+i}$	$-2+i$
$-i$	$\frac{3}{1+i}$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$	$2-i$	$-i$

Multiplications de nombres complexes

On trouve toujours comme produit des 4 cases la valeur 2.
On peut construire la table de multiplication à partir des nombres des 8 cases de couleur ci-dessous, dont le produit est 2.

$\times$	$e^{-i\frac{\pi}{6}}$	$e^{-2i\frac{\pi}{3}}$	1	$\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$
1	$e^{-i\frac{\pi}{6}}$	$e^{-2i\frac{\pi}{3}}$	e^0	$\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$
$\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$	$\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$	$2\ e^0$
$e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$e^{-i\pi}$	$e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$\sqrt{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
$e^{\frac{7}{6}i\pi}$	$e^{i\pi}$	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$e^{\frac{7}{6}i\pi}$	$\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$

Dans quels espaces proposer des tours de magie mathématique, et rencontrer divers publics de façon impromptue ou de façon choisie et préméditée ?

(en dehors des clubs que vous pouvez animer dans les établissements scolaires)

1) Fêtes de rue : tenue d'un stand de mathémagie en libre service pour le grand public

- La fête à **Fermat**, à **Beaumont de Lomagne**, le dimanche qui termine la fête de la science (mi-octobre, depuis 2002). Dans tout le village, sous la halle du 14^{e} derrière la statue de Fermat, et dans le musée qui occupe sa maison natale…

- pour **la fête de la science**, en divers lieux selon les municipalités ou les associations organisatrices à caractère scientifique (parcs publics en plein air…),

2) Salons :

- Le **Salon du CIJM à Paris**, salon de la culture et des jeux mathématiques (depuis 2000, place St Sulpice, pendant 4 jours du jeudi au dimanche, fin mai) ; 40 heures de présence, avec l'assistance d'anciens élèves, devant des scolaires pré-inscrits et/ou le grand public en passage libre et gratuit).

3) Ateliers :

- les ateliers pour **professeurs** volontaires lors des journées nationales de l'APMEP chaque année, et pour les régionales de l'APMEP partout en France

- ateliers pour des **collégiens**, ou des **lycéens**, ou des **écoliers** du primaire (à partir de 8 ans), après demande de leurs établissements scolaires. Effectif idéal : d'une douzaine à une vingtaine de jeunes de niveaux scolaires assez voisins. Parfois une structure régionale peut proposer vos services et prendre en charge votre déplacement à la place de l'établissement scolaire (exemple l'Espace Mendès France de Poitiers pour la région Poitou-Charentes)

- ateliers pour des **retraités** (exemple : « les amis du Museum de La Rochelle ») : avec un grand succès de réutilisation sympathique avec leurs petits enfants ! Entre les séances avec le « prof » les retraités se réunissent entre eux pour s'entraîner…

- ateliers dans les **médiathèques** pour des **enfants** accompagnés souvent de leurs **parents,** ainsi que des **habitués** parfois **âgés** et **solitaires…**

4) Animations sur demandes :

- pour un anniversaire, par exemple dans un lycée (l'anniversaire d'Euler, à Yverdon en Suisse en 2002)

- pour une journée de popularisation des maths (à l'Université d'Orléans en 2012…)

- comme intermèdes lors de la remise de prix de concours de mathématiques (concours Kangourou, concours Pangea, rallye Poitou-Charentes, etc.)

- pour la fête de la science dans un établissement : ateliers, conférences/spectacles, café scientifique, rencontres avec des instituteurs, des profs, des parents autour de la mathémagie (exemple : collège St Exupéry de Bourges en avril 2014)

5) CONFERENCES/spectacles pour grand public ou pour public choisi :

Elles peuvent être plus ou moins généralistes ou ciblées sur un thème mathématique particulier… Exemples :

-a) **« Mathématiques, magie et mystère »**

L'exposé détaillera des exemples de création de tours magiques à partir des maths, et réciproquement on entrera en démarche scientifique pour décortiquer des tours et y découvrir des maths. Des objets mathémagiques originaux peuvent être le support de tours basés sur des calculs : on étudiera la construction de certains d'entre eux.

Les jeux et les tours de magie qui seront présentés ne nécessitent, pour la plupart, qu'un matériel simple à se procurer, ce qui favorise l'appropriation par les enseignants qui voudraient s'y intéresser, et ce qui permet aux élèves de les refaire à la maison en famille ou avec des amis, de façon très valorisante pour eux. Cette situation peut également contribuer à véhiculer autour des enfants l'idée positive que les mathématiques peuvent être, aussi, un talent de société.

Par analogie et extension, les élèves peuvent imaginer et créer de nouveaux jeux ou objets mathémagiques personnalisés, qui selon les choix du professeur et de l'enfant seront plus faciles ou plus compliqués. Les tours peuvent donc développer la créativité de tout un chacun. Ensuite, en les reproduisant devant un public, les capacités d'argumentation et de communication augmentent, ainsi que la confiance en soi. La mathémagie devient un sport complet, où les mathématiques conduisent à un épanouissement personnel.

Le titre de la conférence est un hommage au vulgarisateur scientifique Martin Gardner, récemment disparu, dont un livre est justement titré « mathématiques, magie et mystère ».

-b) **« CALCULS MAGIQUES pour jeunes MATHEUX en puissance… »**

Dans le même esprit que la conférence précédente, on s'intéressera à d'autres tours, liés essentiellement au calcul mental réfléchi, ce qui permet de donner l'illusion d'être un calculateur prodige alors qu'on est avant tout organisé, et que les calculs utiles sont prémédités.

-c) **« Florilège d'activités Math é Magiques du CP au CM2 »**

Dans le cadre de la refondation de l'école et d'une animation **péri-scolaire** dans le domaine scientifique, voici un **contenu concret** exposé pour servir à tous les intéressés : animateurs, professeurs d'écoles, parents. Les activités variées concerneront **tous les niveaux du primaire** et seront **reproductibles par tous**, *sans investissement financier* (quand on aura besoin d'un matériel particulier on le construira avec papier, crayon, enveloppes, ciseaux et adhésif).

Tous les tours proposés sont susceptibles de développer chez les enfants la réflexion intellectuelle, l'esprit scientifique, le sens de l'organisation, et aussi des qualités littéraires et de communication, ainsi que la créativité.

Ces conférence/ spectacles ont été demandées par des espaces scientifiques par exemple : l'Espace Mendès-France de Poitiers (pour tout public), la Faculté des Poitiers (pour montrer un enseignement original aux étudiants), le Museum de La Rochelle, le Radôme (musée du centre spatial de Pleumeur-Bodou, pour l'animation touristique d'été), en diverses médiathèques (partout en France), au Palais de la découverte à Paris…

6) Formation à la mathémagie de professeurs d'écoles, de profs de maths, de médiateurs scientifiques ou d'animateurs.

- par exemple dans le cadre du Palais de la Découverte à Paris, et en association avec lui, pour des stages proposés au PAF par les rectorats de Paris, Créteil, Versailles
- en Belgique : formation des cadres, Fédération de l'enseignement secondaire catholique (FESeC).
- en Algérie (à venir…), au Canada (à l'étude).

Magie mathématique dans votre établissement…

Vous animez un club, le plus souvent entre midi et 14h, parallèlement avec la cantine, dans une salle fixe où vous pouvez laisser sous armoire un peu de matériel…

- La fréquentation est meilleure en collège (les élèves demi pensionnaires ne peuvent sortir de l'établissement, et cherchent à s'occuper) qu'au lycée (ils sont libres). De plus la curiosité est souvent plus vive chez les plus jeunes.
- Les élèves viennent sans être inscrits, sans obligation d'assiduité, mais les élèves fidèles ont du « travail » ou des missions à accomplir pour des dates fixes.
- Pour des volontaires il peut être prévu (et l'entraînement organisé sur l'année pour) un spectacle qu'ils animeraient (pour la fin d'année, pour le Noël des enfants des personnels de l'établissement, pour agrémenter une journée importante comme les portes ouvertes ou une demi finale de championnat de jeux maths, etc.).
- Pour un club expérimenté vous pouvez tenter de faire préparer par une demi douzaine d'élèves le concours André Parent qui a lieu pendant le salon du CIJM à Paris fin mai. Il s'agira de présenter un thème mathémagique aux visiteurs du salon, avec une petite animation permanente devant le public qui passe, et un jury.
- Vous pouvez créer un petit journal ou vous intégrer à celui des élèves de l'établissement, et y publier des tours simples de magie avec leurs explications. Ceci sert de pub pour votre club.
- Vous pouvez coller à intervalle régulier dans votre établissement des affiches avec des défis mathémagiques, et demander aux élèves de déposer dans une urne leur solution, et de plus proposer des récompenses (brochures du CIJM qu'on peut obtenir gratuitement par exemple) qui seront distribuées au club. Vous pouvez ajouter en fin d'affiche une phrase philosophique sur les maths ou les sciences qui fera discuter éventuellement tous les gens qui fréquentent l'établissement (les profs de philo très souvent !) avec vous, à la cantine ou ailleurs…
- Vous donnez en priorité en début d'année des principes de magie mathématique qui peuvent être repris avec un peu d'imagination sur des thèmes divers. Les élèves vous surprendront par leur capacité à inventer des variantes proches de leur vécu. Faites-leur rédiger leurs idées, passez-les dans le journal du bahut ou dans une autre revue extérieure si vous y avez vos entrées (j'ai fait toucher des droits d'auteurs à plusieurs de mes élèves de collège pour des articles que j'ai envoyés à la regrettée revue Hypercube).
- Montrez en club quelques Power Point de défis magiques que vous connaissez. Demandez à tous les élèves de surveiller sur Internet les défis de ce genre qui tournent, et étudiez avec eux

le « comment cela marche ? ». Faites-leur mettre au point de tels Power Point sur des tours simples que vous connaissez, ou sur ceux dont ils viennent d'avoir eux-mêmes l'idée.
- Si vous connaissez des collègues qui pratiquent aussi la magie mathématique dans leur établissement lancez entre vous des défis réciproques, échangez par Internet des Power Point de vos fabrications…
- N'oubliez pas de créer au CDI un petit espace où seront rassemblés les ouvrages de magie mathématique et les revues qui passent des tels tours, et où il sera facile de s'asseoir. Un petit panneau d'affichage à proximité avec vos défis magiques contribuera à implanter votre petit monde, refuge et espace de rêve…

A propos du **mystère** :

"La plus belle expérience que nous pouvons vivre est le mystérieux. Il représente l'émotion fondamentale qui se trouve à l'origine de l'art et de la science véritables. Quiconque ne l'a jamais rencontré et n'est plus capable de s'étonner ou de s'émerveiller est comme mort et ses yeux sont clos."

[Comment je vois le monde, 1930] Einstein

J'aurai plaisir à échanger avec vous sur le sujet :

dominique.souder@gmail.com

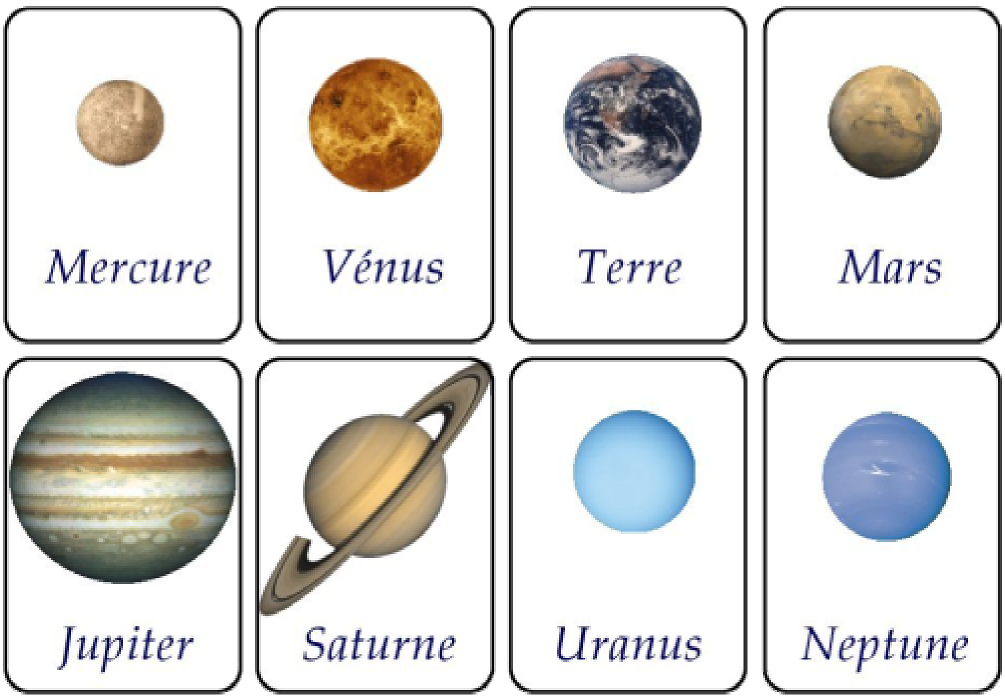
Pour célébrer le thème **« Ciel les mathématiques ! »** des journées nationales 2014 de l'APMEP, voici pour finir un tour (sur un de mes thèmes fameux de magie) adapté pour un **sujet d'astronomie**, et qui est dû à l'imagination fertile de Mickaël Launay. (Avoir eu un élève comme Mickaël dans son club de jeux mathématiques au lycée Valin de La Rochelle est une des grandes chances de ma carrière de prof). Ce tour « le voyage de Neptune » a été repris par SMAC, l'Université de Laval de Québec, et figure dans la plaquette du spectacle « Pluton va en appel » proposé par le CIJM lors de son dernier Salon de Paris. Les illustrations ci-dessous sont de Mickaël Launay…

Le voyage de Neptune

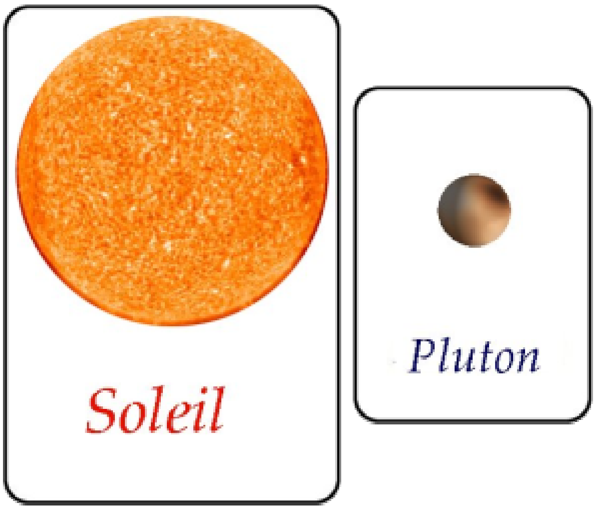
Voici un tour de magie qui va vous faire réviser les planètes du système solaire.

Matériel

Pour ce tour, vous avez besoin de huit cartes correspondant aux huit planètes du système solaire :



Vous pouvez aussi prendre deux autres cartes, une pour le Soleil et une autre pour Pluton :



Ces deux dernières cartes ne sont pas vraiment nécessaires au tour. Elle sont juste là pour agrémenter l'histoire que l'on va raconter aux spectateurs.

Vous pouvez imprimer ces cartes en les téléchargeant grâce aux liens suivants (format pdf) :

- Les huit planètes
- Le Soleil et Pluton

Le tour

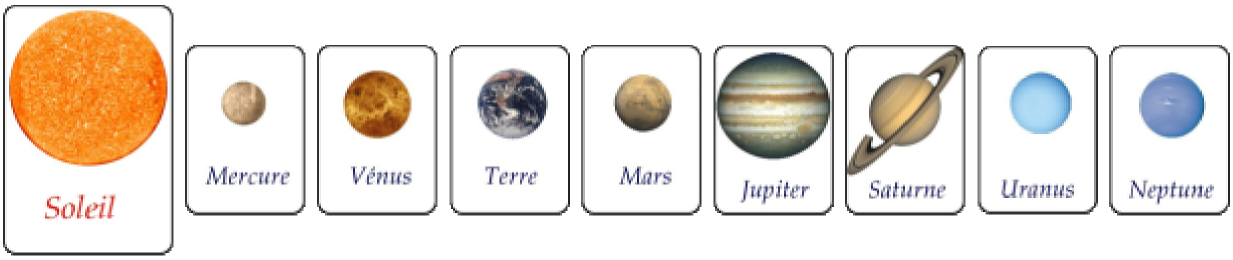
Le système solaire est composé d'une étoile, le Soleil, ainsi que de huit planètes (de la plus proche à la plus éloignée du Soleil) : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

(Une phrase poétique pour retenir cet ordre, grâce à la première lettre de chaque mot, m’a été donnée par une ancienne élève : « Me Voici Toute Mouillée, Je Suivais Un Nuage Printanier »,

mais il existe beaucoup d’autres procédés mnémotechniques, par exemple :

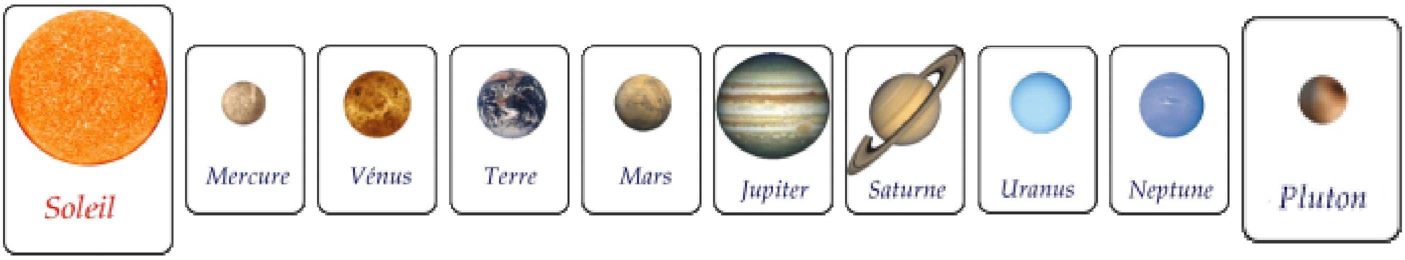
« Mon Vieux Théâtre M’a Joué Souvent Une Nouvelle Pièce », où le « a » correspond aussi à la position de Astéroïdes)

En expliquant ceci à votre public, disposez les cartes de la façon suivante sur la table :



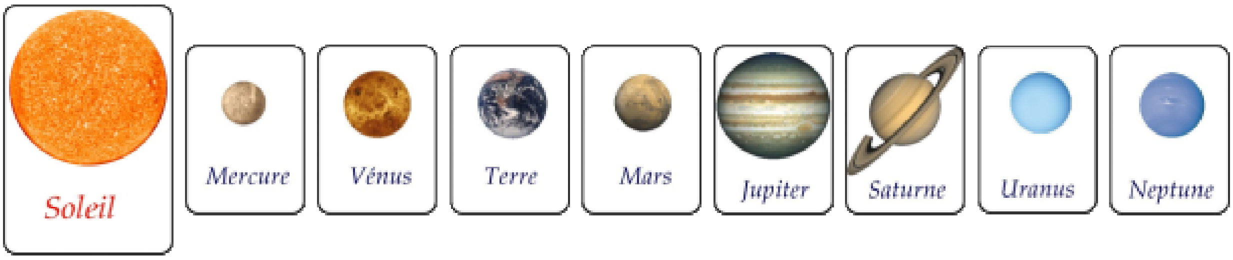
Cependant, jusqu'en 2006, les astronomes considéraient qu'il y avait une autre planète dans le système solaire : Pluton.

Placez Pluton après Neptune.



Pluton avait été découverte en 1930 et annoncée comme la neuvième planète. Seulement au fil des années les astronomes ont réalisé qu'elle ne méritait pas vraiment ce titre. En effet, Pluton était bien plus petite que la plupart des autres planètes et suivait une trajectoire inclinée par rapport aux autres. De plus, d'autres astres ayant à peu près la même taille que Pluton ont été trouvés, tels que Cérès. On ne pouvait pas donner à tous ces nouveaux astres le nom de planète donc les astronomes ont finalement décidé en 2006 de retirer Pluton de la liste des vraies planètes pour la mettre dans une autre catégorie, celle des planètes naines où elle rejoint Cérès...

Retirez Pluton des planètes posées sur la table (à partir de là, vous n'aurez plus besoin de cette carte).



Seulement voilà, Pluton évincé, la planète Neptune se retrouve à la place de dernière planète. Alors Neptune commence à s'inquiéter en se disant que si jamais les astronomes se décidaient à supprimer une nouvelle planète, elle serait la prochaine victime. Elle pense alors qu'elle serait plus en sécurité si elle pouvait se rapprocher du soleil. Et venir se placer par exemple entre Mercure et Vénus.

Faîtes glisser Neptune et venez la placer entre Mercure et Vénus :

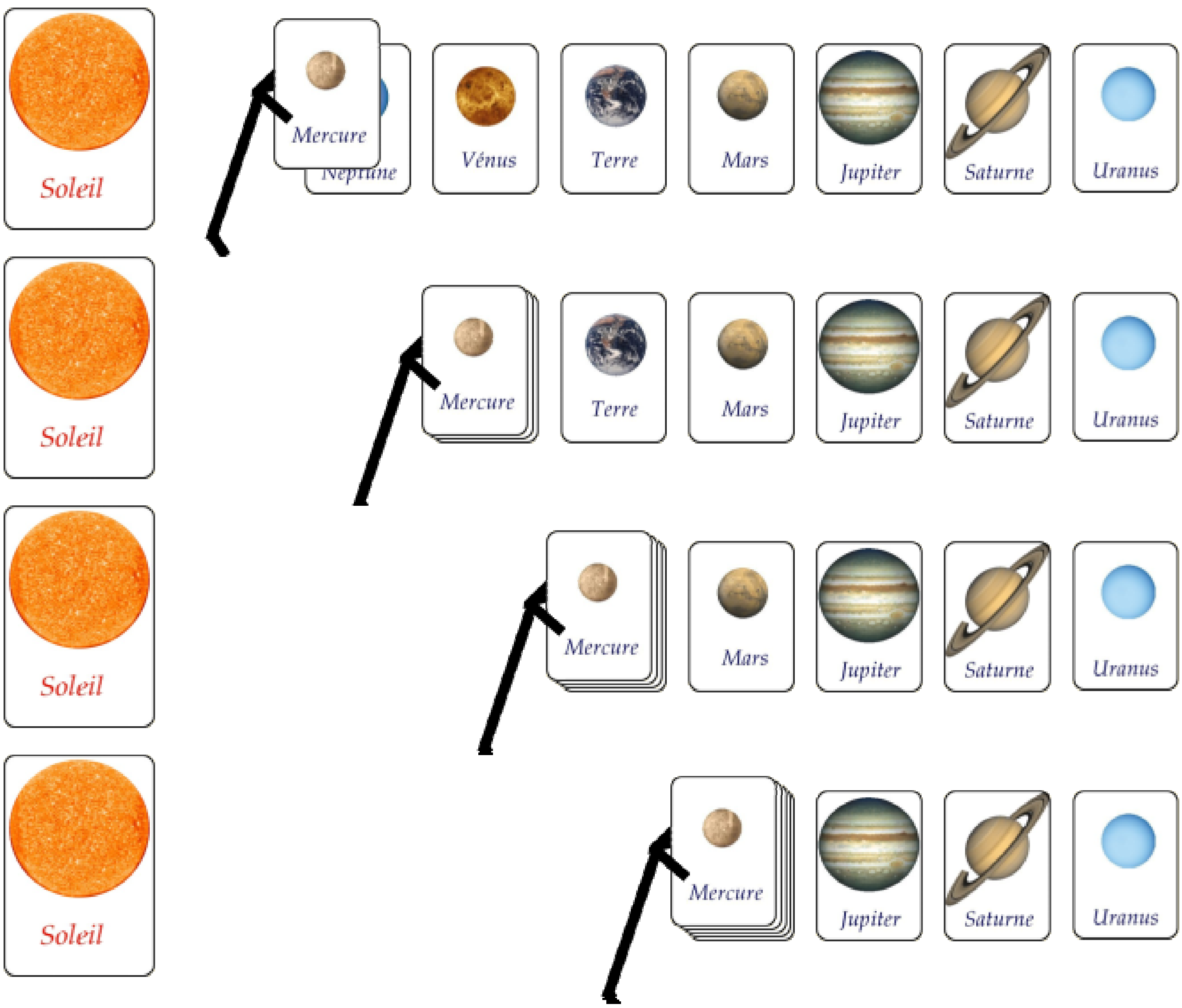
L'ordre des planètes serait alors le suivant : Mercure, Neptune, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus.

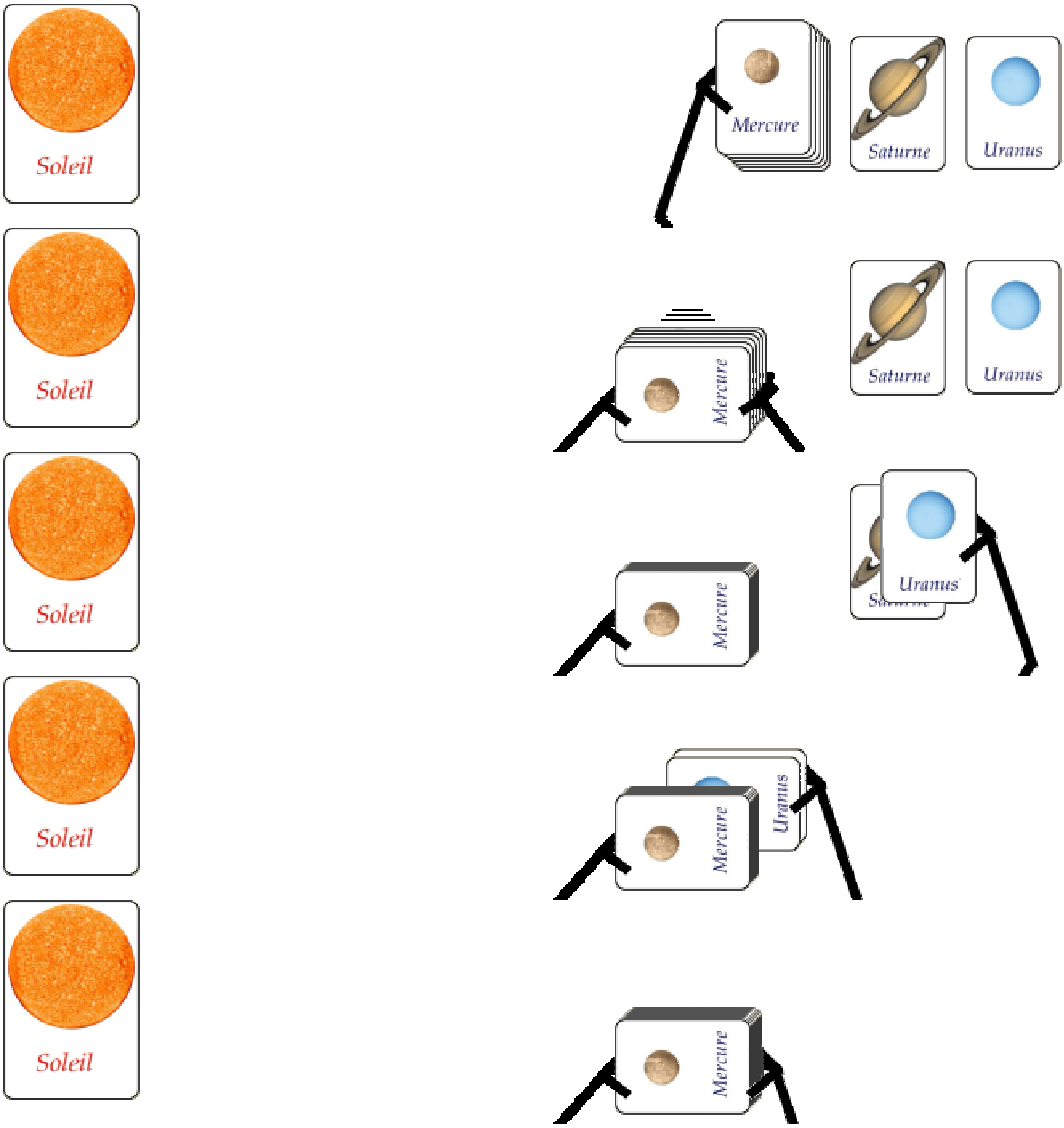
En énumérant les planètes, ramassez-les sur la table de la façon suivante :

- Prenez Mercure et placez le sur Neptune,
- Puis placez le paquet Mercure-Neptune sur Vénus,
- *Etc.* jusqu'à Jupiter
- Pour ramasser Saturne et Uranus vous allez vous y prendre différemment. Une fois arrivé à Jupiter, faîtes semblant de rassembler le paquet et profitez-en pour changer la main avec laquelle vous ramassez Uranus et Saturne. De cette façon, vous commencerez par ramasser Uranus, que vous poserez sur Saturne, puis vous placerez les deux cartes ainsi réunies au-dessus du paquet formé des autres planètes.

Vous devez alors avoir obtenu un paquet dont les cartes sont dans l'ordre en partant du dessus (faces vers le bas) : Saturne, Uranus, Jupiter, Mars, la Terre, Vénus, Neptune et Mercure.

Si vous n'avez pas bien compris, voici les manipulations en images :





Entraînez-vous bien à ramasser les cartes de cette façon. Vous devez le faire naturellement en ayant l'air de ramasser les cartes dans l'ordre où elles se trouvent sur la table. Les spectateurs ne doivent normalement pas se rendre compte que Saturne et Uranus ont été inversées. Ou en tout cas, il ne faut pas qu'ils aient l'impression que l'ordre des cartes est important.

Bien entendu, il est impossible qu'une planète se déplace de la sorte dans le système solaire. D'autant plus que cela déséquilibrerait les trajectoires de toutes les autres planètes. Nous allons donc les remettre dans l'ordre.
Nous allons les appeler une à une par leur nom. Commençons donc par Mercure : M-E-R-C-U-R-E.

Pour cette manipulation vous devez tenir le paquet de cartes faces vers le bas. On ne doit plus voir la face des cartes jusqu'à ce qu'elles soient retournées. (De cette façon c'est donc Saturne la carte sur le dessus du paquet tandis que Mercure est en dessous.)

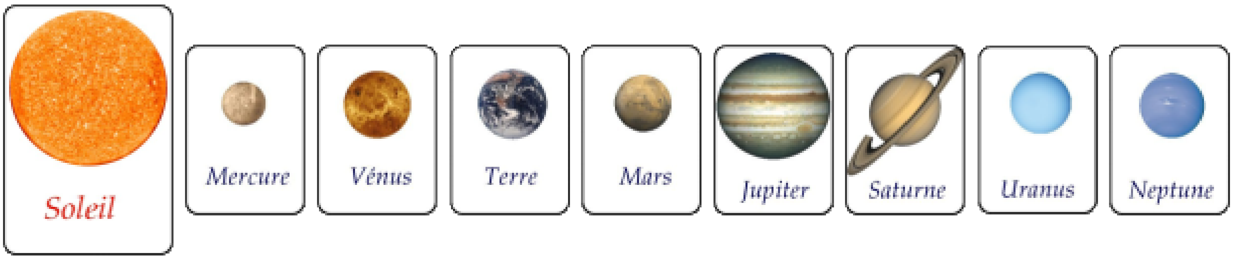
- En prononçant le M, prenez la carte sur le dessus du paquet et placez la sous le paquet.
- Faîtes la même chose pour le E. Placez la carte du dessus du paquet sous le paquet.
- Et ainsi de suite pour chacune des sept lettres du nom de Mercure. Vous devez donc placer sept cartes sous le paquet.

Retournez alors la carte qui se trouve sur le dessus du paquet en annonçant : Voilà Mercure ! Et c'est effectivement Mercure. Placez la carte à côté du Soleil.

Faîtes ensuite la même chose pour Vénus. En épelant V-E-N-U-S, vous placez cinq cartes du dessus sous le paquet. Retournez la carte qui est sur le dessus du paquet, c'est Vénus ! Placez la à coté de Mercure.

Continuons d'appeler les planètes une à une : T-E-R-R-E, et voilà la Terre. M-A-R-S, Mars arrive. J-U-P-I-T-E-R, on retourne Jupiter. S-A-T-U-R-N-E, voilà la planète aux anneaux. U-R-A-N-U-S, la voici.

À chaque fois, retournez la carte annoncée qui se trouve bien sur le dessus du paquet et placez la à la suite des autres. La dernière carte qui vous reste dans les mains est Neptune, la voyageuse, qui retrouve la huitième et dernière place du système solaire. Ouf ! Tout est bien qui finit bien.

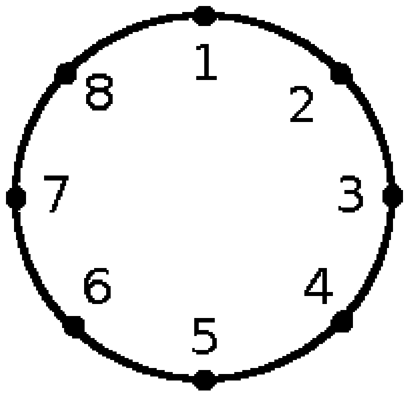


Comment ça marche ?

Pour comprendre comment le tour marche, nous allons nous poser la question suivante :

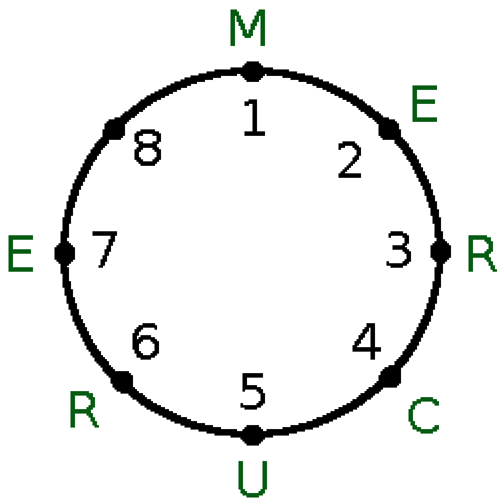
Dans quel ordre doit-on mettre les cartes au départ pour que les planètes ressortent dans l'ordre à l'arrivée quand on les fait sortir en épelant leur nom comme on l'a fait ?

Remarquons pour commencer que, du fait qu'à chaque lettre on prend une carte sur le dessus pour la mettre en dessous, les cartes forment un cycle. On peut représenter ce cycle sur un cercle :

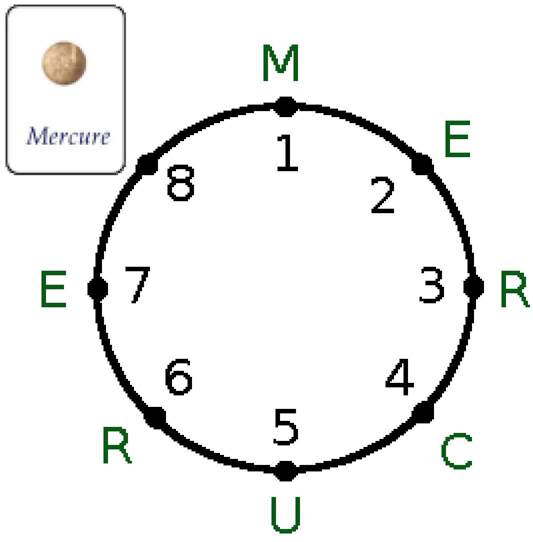


Le numéro 1 désigne la carte sur le dessus du paquet et le 8 celle du dessous.

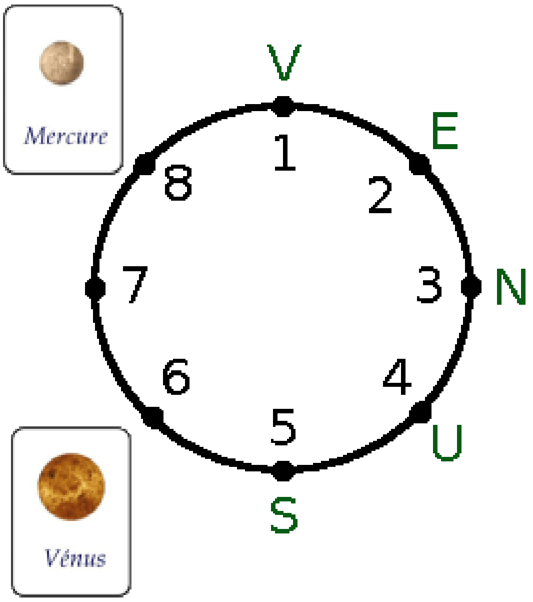
Où doit être placé Mercure pour sortir en premier ? Pour chaque lettre du nom de Mercure on fait passer une carte de dessus à dessous :



Mercure doit être la carte suivante. Elle doit donc se trouver en 8$^{\text{ème}}$ position :

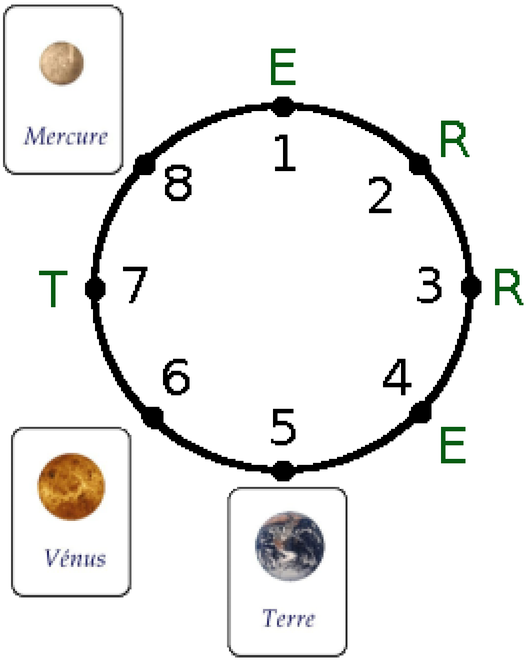


Comme les cartes ont fait un tour complet, le décompte de Vénus reprend à la carte numéro 1 :

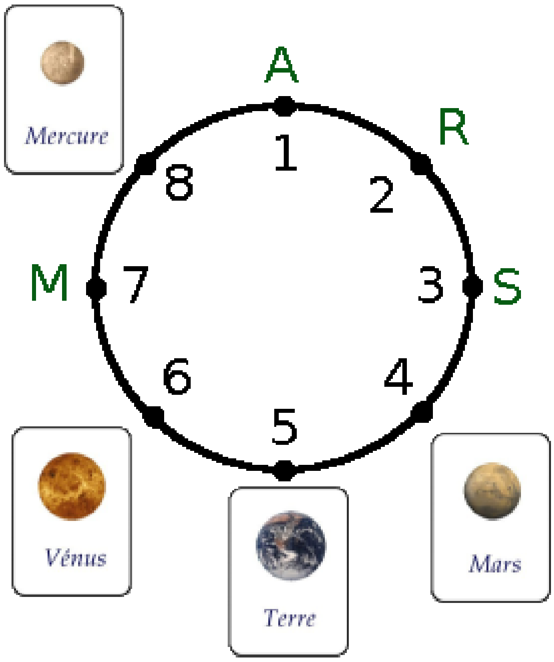


Vénus doit par conséquent être placée en 6ème position.

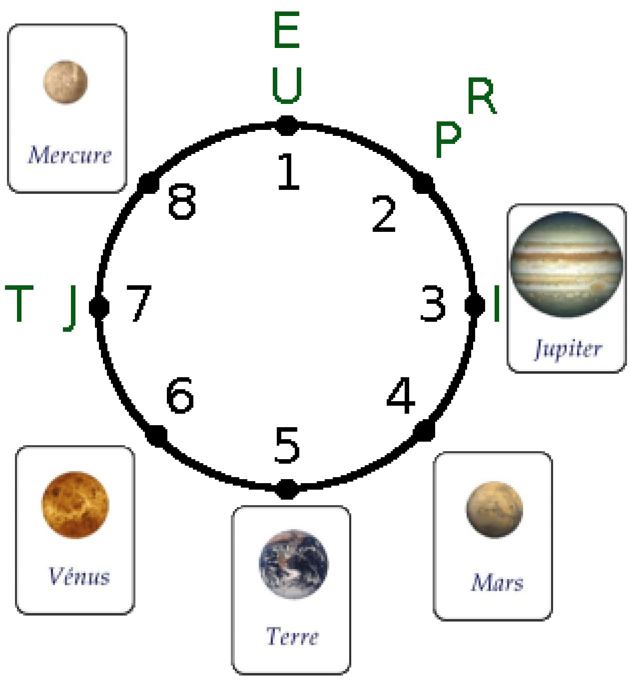
En énumérant la Terre, on saute la carte Mercure car celle-ci n'est plus dans le paquet :



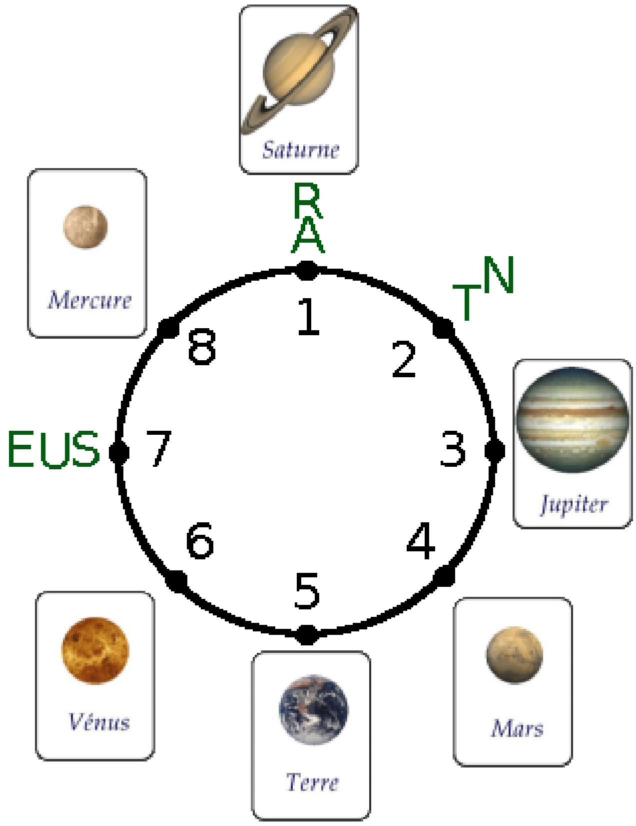
On continue avec Mars qui se retrouve en 4ème position :



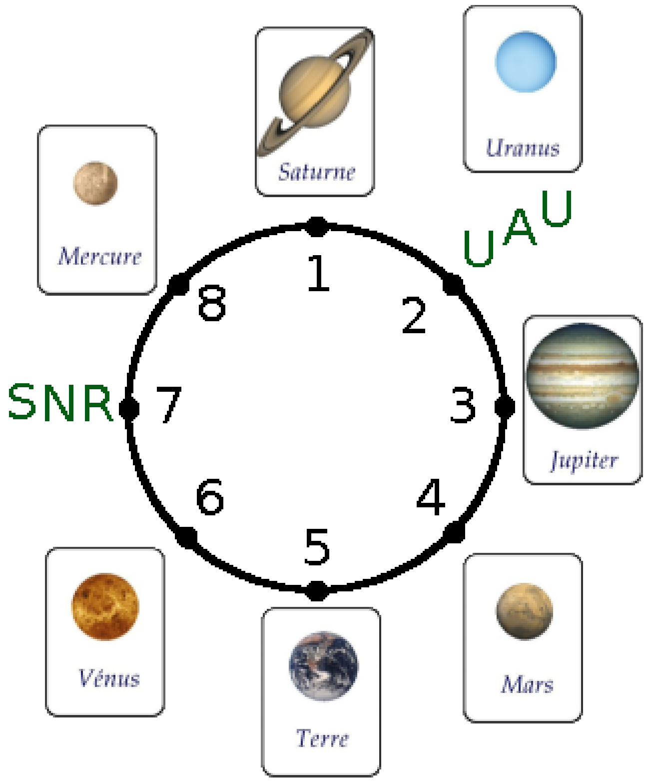
Pour Jupiter, on fait deux fois le tour du paquet et la carte doit se trouver en 3ème position :



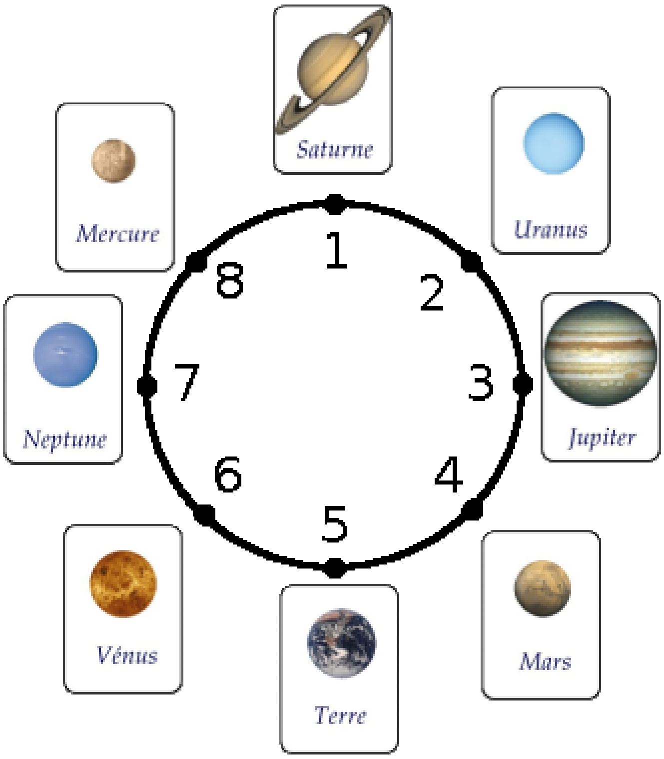
Pour Saturne on fait presque trois fois le tour du paquet (Saturne beaucoup).



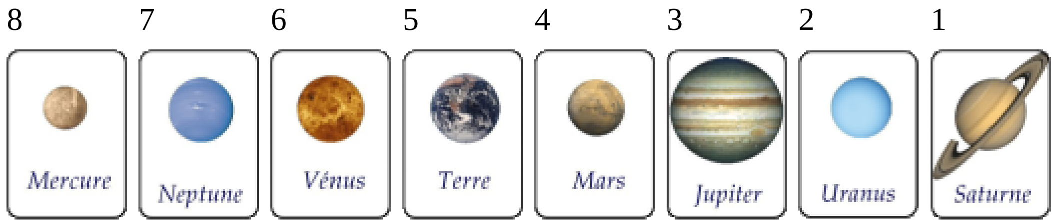
Uranus doit être en deuxième position :



Et Neptune prend naturellement la place qui manque :



Si on déplie le cercle



Et vous remarquez : C'est précisément l'ordre dans lequel on a ramassé les cartes ! C'est pour cette raison que l'on raconte l'histoire du voyage de Neptune et que l'on inverse Uranus et Saturne en ramassant les cartes.

Une fois qu'on a ramassé les cartes dans cet ordre là, tout est joué, il n'y a plus qu'à énumérer les différentes planètes pour les voir apparaître dans l'ordre.